

Rappels Traitement du Signal

Note de cours

T.Dumartin

1 GENERALITES **4**

1.1 INTRODUCTION	4
1.2 DEFINITIONS	4
1.2.1 SIGNAL	4
1.2.2 BRUIT	4
1.2.3 RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT	4
1.2.4 SYSTEME	4
1.3 CLASSIFICATION DES SIGNAUX	5
1.3.1 CLASSIFICATION PHENOMENOLOGIQUE	5
1.3.2 CLASSIFICATION ENERGETIQUE	5
1.3.3 CLASSIFICATION MORPHOLOGIQUE	5
1.4 SIGNAUX PARTICULIERS	6
1.4.1 FONCTION SIGNE	6
1.4.2 FONCTION ECHELON	6
1.4.3 FONCTION RAMPE	6
1.4.4 FONCTION RECTANGULAIRE	6
1.4.5 IMPULSION DE DIRAC	7
1.4.6 PEIGNE DE DIRAC	8
1.4.7 FONCTION SINUS CARDINAL	8
1.5 REPRESENTATION FREQUENTIELLE	8

2 TRAITEMENT DU SIGNAL ANALOGIQUE **9**

2.1 SERIE DE FOURIER	9
2.1.1 DEFINITION	9
2.1.2 DEVELOPPEMENT EN TERMES COMPLEXES	10
2.1.3 PROPRIETES	10
2.2 TRANSFORMEE DE FOURIER	10
2.2.1 DEFINITION	10
2.2.2 PROPRIETES	11
2.2.3 EXEMPLE	12
2.3 CONVOLUTION	12
2.3.1 DEFINITION	12
2.3.2 TRANSFORMEE DE FOURIER	13
2.4 NOTION DE FILTRAGE	13
2.4.1 FONCTION DE TRANSFERT	13
2.4.2 FILTRE REEL – GABARIT	14
2.5 NOTION DE MODULATION	15
2.5.1 PRINCIPE	15
2.5.2 MODULATION D'AMPLITUDE	15

3 NUMERISATION **17**

3.1 ECHANTILLONNAGE	17
3.1.1 DEFINITION	17
3.1.2 ECHANTILLONNAGE IDEAL	17
3.1.3 ECHANTILLONNAGE REEL	18
3.1.4 ECHANTILLONNAGE-BLOCAGE	19
3.2 QUANTIFICATION	20
3.2.1 DEFINITION	20
3.2.2 QUANTIFICATION UNIFORME	20
3.3 CODAGE	21

4 TRAITEMENT DU SIGNAL NUMERIQUE

22

4.1	TRANSFORMEE DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET	22
4.1.1	DEFINITION	22
4.1.2	PROPRIETES	22
4.2	TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE	23
4.2.1	FENETRAGE	23
4.2.2	ECHANTILLONNAGE EN FREQUENCE	24
4.3	NOTION DE TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE	26
4.3.1	PRESENTATION A L'ALGORITHME DE COOLEY-TUCKEY	26

Annexe 1 : Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

Annexe 2 : Transformée de Fourier de la fonction porte

1 Généralités

1.1 Introduction

Le traitement du signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Son but est donc de réussir à extraire un maximum d'information utile sur un **signal** perturbé par du **bruit** en s'appuyant sur les ressources de l'électronique et de l'informatique.

1.2 Définitions

1.2.1 Signal

Un *signal* est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyser, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

1.2.2 Bruit

Un *bruit* correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

Remarque :

Les notions de signal et bruit sont très relatives. Pour un technicien des télécommunications qui écoute un émetteur lointain relayé par un satellite, le signal provenant d'une source astrophysique (soleil, quasar) placée malencontreusement dans la même direction est un bruit. Mais pour l'astronome qui s'intéresse à la source astrophysique, c'est le signal du satellite qui est un bruit.

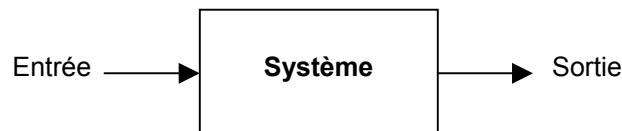
1.2.3 Rapport signal sur bruit

Le *rapport signal sur bruit* mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal (P_S) et du bruit (P_N). Il est souvent donné en décibels (dB).

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{dB} = 10 \log \frac{P_S}{P_N}$$

1.2.4 Système

Un *système* est un dispositif représenté par un modèle mathématique de type Entrée/Sortie qui apporte une déformation au signal (Ex: modulateur, filtre, etc...).



1.3 Classification des signaux

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

1.3.1 Classification phénoménologique

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes** : ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modéliser par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc...
- **Les signaux aléatoires** : leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

1.3.2 Classification énergétique

On considère l'énergie des signaux. On distingue :

- **Les signaux à énergie finie** : il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie.
- **Les signaux à puissance moyenne finie** : il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.

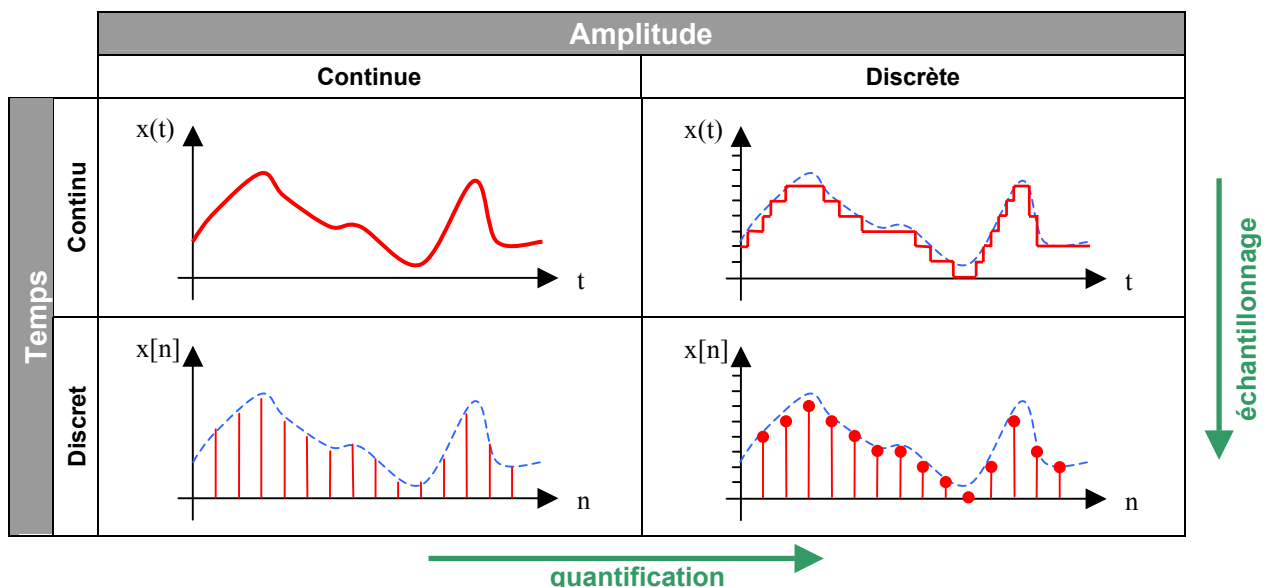
Rappels :

$$\text{Energie d'un signal } x(t) \Rightarrow W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Puissance d'un signal } x(t) \Rightarrow P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

1.3.3 Classification morphologique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.



On obtient donc 4 classes de signaux :

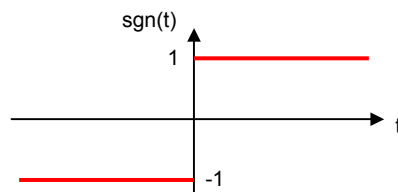
- **Les signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
- **Les signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- **Les signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
- **Les signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

1.4 Signaux particuliers

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenues, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

1.4.1 Fonction signe

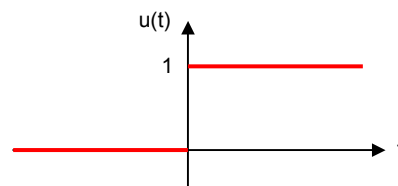
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ +1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



Par convention, on admet pour valeur à l'origine : $\text{sgn}(t) = 0$ pour $t=0$.

1.4.2 Fonction échelon

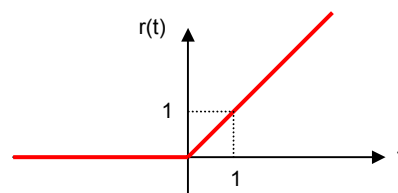
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



Par convention, on admet pour valeur à l'origine: $u(t) = \frac{1}{2}$ pour $t=0$. Dans certains, il sera préférable de lui donner la valeur 1.

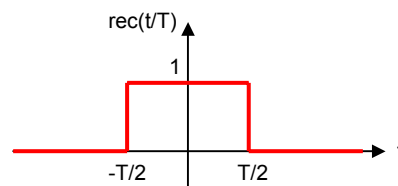
1.4.3 Fonction rampe

$$r(t) = t \cdot u(t) \\ = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$



1.4.4 Fonction rectangulaire

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

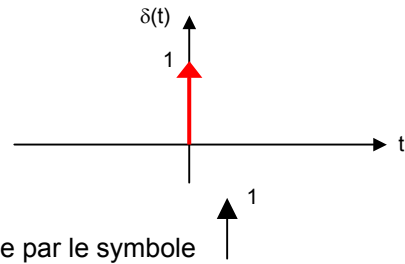


On l'appelle aussi fonction porte. Elle sert de fonction de fenêtrage élémentaire.

1.4.5 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$



$\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement. On la schématise par le symbole

Attention: le 1 marqué sur la flèche pleine représente l'aire de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

On peut encore considérer $\delta(t)$ comme la dérivée de la fonction échelon : $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

▪ Propriétés :

Intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Produit

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) = x(0)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)$$

Identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_0) = x(t - t_1 - t_0)$$

Changement de variable

$$\delta(a \cdot t) = |a|^{-1} \delta(t) \quad \text{avec en particulier } \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi f} \delta(t)$$

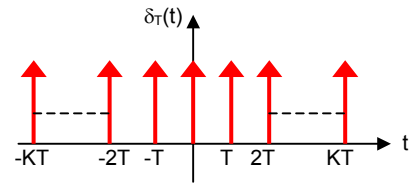
Remarque :

Un signal physique $y(t)$ correspondant au passage d'un état (1) vers un état (2) pourra être considéré comme un impulsion chaque fois que son temps de montée t_m sera négligeable devant les autres temps mis en jeu dans le circuit. Il en est de même pour un échelon.

1.4.6 Peigne de Dirac

On appelle *peigne de Dirac* une succession périodique d'impulsions de Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



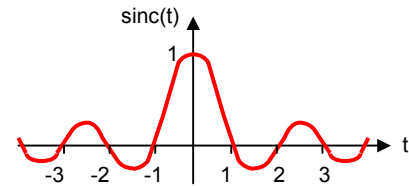
T est la période du peigne.

Cette suite est parfois appelée *train d'impulsions* ou *fonction d'échantillonnage*.

Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage .

1.4.7 Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

- **Propriétés :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$$

1.5 Représentation fréquentielle

On a pour habitude de décrire les signaux en fonction de la variable temporelle t car notre perception des phénomènes physiques nous y incite. En électronique, la connaissance des propriétés spectrales d'un signal est primordiale. Ainsi, on utilise souvent une représentation en fonction de la fréquence pour caractériser un signal ou un système. Les outils de traitement des signaux nous aident dans cette tâche.

Exemple : le support de transmission du téléphone à une bande passante de 3kHz alors que la bande passante des signaux audibles est de 20kHz. Ceci explique pourquoi un signal audio de haute qualité transmis par voie téléphonique sera perçu comme de mauvaise qualité par le récepteur.

2 Traitement du signal analogique

2.1 Série de Fourier

2.1.1 Définition

La décomposition en **série de Fourier** permet de décomposer un signal en somme de sinusoïdes. On utilise principalement les séries de Fourier dans le cas des signaux périodiques. Elles permettent ainsi de passer facilement du domaine temporel au domaine fréquentiel. Pour pouvoir être décomposable, un signal doit être à variations bornées (Dirichlet).

Pour tout signal $s(t)$ réel où $s(t) = s(t+T_0)$, on peut écrire :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)] \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{(t_0)} s(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T_0} \int_{(t_0)} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T_0} \int_{(t_0)} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Remarques :

On appelle le signal de pulsation ω_0 le *fondamental*.

On appelle les signaux de pulsation $n.\omega_0$ les *harmoniques de rang n*.

La valeur de S_0 représente la *valeur moyenne* de $s(t)$.

Autre expression :

L'écriture précédentes des séries de Fourier présente en fait peu d'intérêt physique, en effet si la fonction $f(t)$ subit une simple translation suivant l'axe des temps alors les coefficients A_n et B_n seront modifiés. En conséquence, on cherche donc une nouvelle écriture des séries de Fourier dans laquelle la puissance est conservée après une translation suivant l'axe des temps et où cette translation apparaîtra sous la forme d'un déphasage.

Cette nouvelle écriture s'obtient en posant :

$$\begin{cases} A_n = C_n \sin \Phi_n \\ B_n = C_n \cos \Phi_n \end{cases}$$

ainsi, en remplaçant A_n et B_n dans :

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)] \\ s(t) &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\sin \Phi_n \cos(n\omega_0 t) + \cos \Phi_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned}$$

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \Phi_n)$$

avec

$$\begin{cases} \Phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n} \\ C_n^2 = A_n^2 + B_n^2 \end{cases}$$

!! Attention !!

Si l'on intervertit la place des paramètres B_n et A_n (A_n devant \sin et B_n devant \cos) dans la décomposition en série de Fourier, il ne faut pas oublier de les intervertir dans la définition de ϕ_n aussi.

2.1.2 Développement en termes complexes

En introduisant la notation complexe de $\cos(n\omega_0 t)$ et $\sin(n\omega_0 t)$, il est possible d'obtenir une écriture complexe de la série de Fourier.

On pose $\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$ et $\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$

On obtient alors :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_0 t}$$

avec

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Les coefficients complexes S_n sont reliés aux coefficients A_n et B_n par les relations suivantes :

$$\begin{cases} S_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \\ S_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2} \end{cases} \quad \forall n > 0$$

Remarques :

Dans les deux formes précédentes, chaque composante de fréquence était représentée par deux coefficients. L'écriture complexe ne fait apparaître qu'un seul coefficient S_n complexe mais qui comprend bien entendu un module et une phase.

2.1.3 Propriétés

Si $s(t)$ est paire $\longrightarrow B_n = 0$ et $S_n = S_{-n}$
 Si $s(t)$ est impaire $\longrightarrow A_n = 0$ et $S_n = -S_{-n}$

2.2 Transformée de Fourier

C'est une généralisation de la décomposition de série de Fourier à tous les signaux déterministes. Elle permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation *spectrale*) de ces signaux. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie (ou de la puissance) des signaux considérés.

2.2.1 Définition

Soit $s(t)$ un signal déterministe. Sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable f et définie par :

$$S(f) = \text{TF}[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Si cette transformée existe, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$s(t) = \text{TF}^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Remarque :

On appelle **spectre** de s le module de la transformée de Fourier de s .

2.2.2 Propriétés

	$s(t)$	$S(f)$
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	$S(t)$	$s(-f)$

Transformée de Fourier de Dirac :

$$\begin{array}{lcl}
 s(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & S(f) \\
 \delta(t) & \longrightarrow & 1 \\
 \delta(t-\tau) & \longrightarrow & e^{-2j\pi f \tau} \\
 e^{-2j\pi f_0 t} & \longrightarrow & \delta(f-f_0)
 \end{array}$$

Egalité de Parseval :

Pour un signal d'énergie finie, l'énergie du signal est identique dans les domaines temporel et fréquentiel.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

2.2.3 Exemple

Calculons la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale : $s(t) = S \cos \omega_0 t$

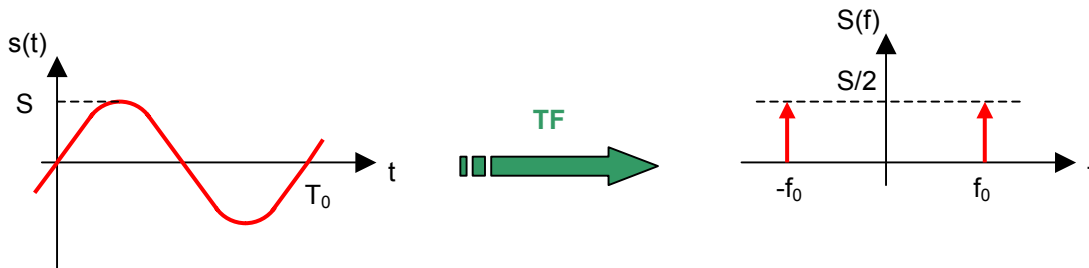
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = S \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \text{ avec } \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$S(f) = S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{S}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right]$$

$$S(f) = \frac{S}{2} \left(\text{TF}[e^{j2\pi f_0 t}] + \text{TF}[e^{-j2\pi f_0 t}] \right)$$

d'où

$$\text{TF}[S \cos 2\pi f_0 t] = \frac{S}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



Remarques :

❶ La transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale de fréquence f_0 est représentée par deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ et $+f_0$. Bien entendu, l'impulsion centrée sur f_0 n'a pas d'existence physique.

❷ Le spectre d'une décomposition en série de Fourier sera donc un spectre discontinu de raies aux fréquences des sinusoïdes présentes dans la décomposition.

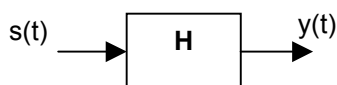
2.3 Convolution

2.3.1 Définition

Le produit de convolution d'un signal $s(t)$ par un autre $h(t)$ est donné par :

$$s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(k) h(t-k) dk$$

Remarque :



Le signal de sortie d'un système linéaire causal invariant dans le temps est donné par le produit de convolution du signal d'entrée et d'une fonction $h(t)$ appelée *réponse impulsionnelle*.

La valeur du signal de sortie à l'instant t est ainsi obtenue par la sommation des valeurs passées du signal d'excitation, pondérées par la réponse du système.

2.3.2 Transformée de Fourier

Par définition :

$$\begin{aligned} \text{TF}[a(t) * b(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} a(k) b(t-k) dk \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} b(t-k) e^{-j2\pi ft} dt \right] dk \end{aligned}$$

Si on pose : $t - k = u$ alors $t = u + k$:

$$\text{TF}[a(t) * b(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{-j2\pi f k} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} b(u) e^{-j2\pi f u} du \right] dk$$

D'où :

$$\boxed{\text{TF}[a(t) * b(t)] = A(f) \cdot B(f)}$$

Remarque :

$$\text{TF}[h(t) * \delta(t)] = \text{TF}[h(t)] \cdot \text{TF}[\delta(t)] = \text{TF}[h(t)] = H(f)$$

d'où $h(t) * \delta(t) = h(t)$: Le Dirac est l'élément *neutre* de la convolution

2.4 Notion de Filtrage

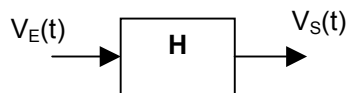
Le filtrage est une forme de traitement de signal qui modifie le spectre de fréquence et/ou la phase du signal présent en entrée du filtre et donc par conséquent sa forme temporelle. Il peut s'agir soit :

- d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables
- d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

On classe les filtres en deux grandes familles :

- les **filtres numériques** réalisés à partir de structure intégrée microprogrammable (DSP).
- les **filtres analogiques** réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs (AII).

2.4.1 Fonction de transfert



signal d'entrée.

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre. On le caractérise par l'amplification et le déphasage qu'il apporte sur les différents harmoniques du

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{V_S(j\omega)}{V_E(j\omega)} \\ |H|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{V_S}{V_E} \right| \quad \varphi = \text{Arg}[\underline{H}(j\omega)] \end{aligned}}$$

Remarques :

❶ Parfois, on préfère définir un filtre par rapport à l'atténuation qu'il amène sur la grandeur d'entrée : $\underline{A}(j\omega) = \frac{1}{\underline{H}(j\omega)}$.

❷ On définit aussi le temps de propagation de groupe plutôt que le déphasage. Il caractérise le retard apporté par le filtre sur les différents harmoniques du signal d'entrée : $\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}$

❸ H est la réponse impulsionnelle du filtre : $V_S(t) = V_E(t) * h(t)$ et $TF[V_S(t)] = V_E(f) \cdot h(f)$

Autrement dit, le spectre du signal de sortie est égale au produit du spectre du signal d'entrée par la réponse en fréquence du filtre.

2.4.2 Filtre réel – gabarit

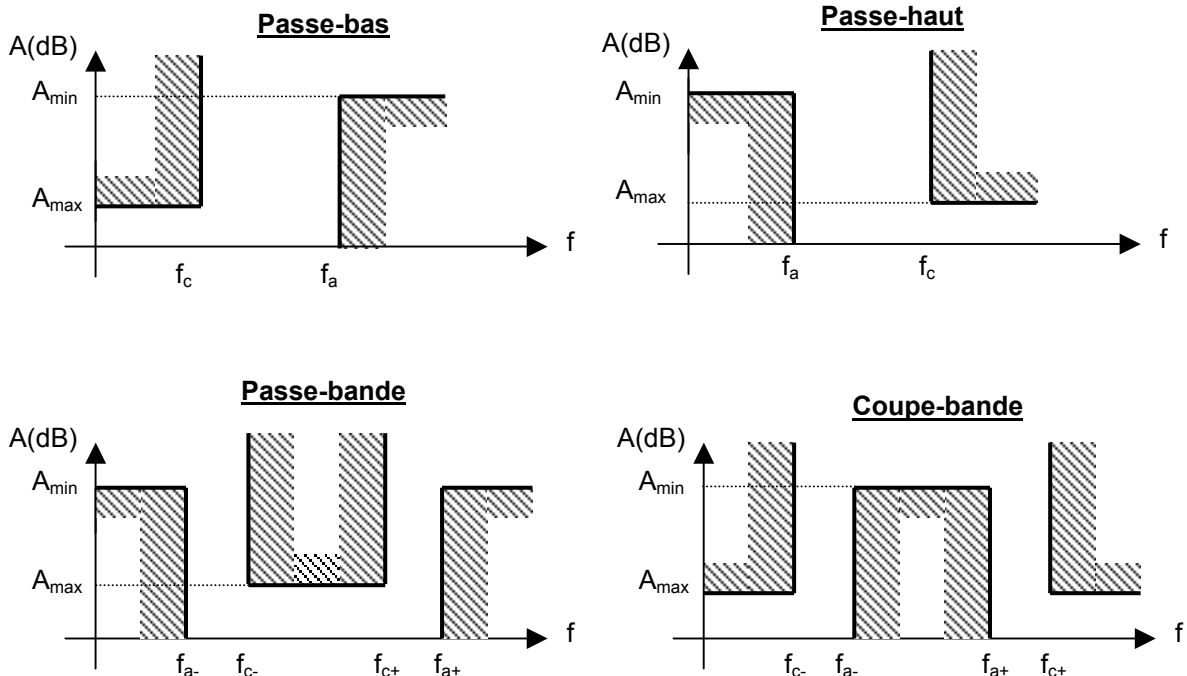
Un filtre idéal présente :

- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire conserver (Bande passante)
- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (Bande atténuée)

Il est impossible pratiquement de réaliser de tels filtres. Aussi se contente-t-on d'approcher cette réponse idéale en :

- conservant l'atténuation A inférieure à A_{max} dans la bande passante
- conservant l'atténuation supérieure à A_{min} dans la bande atténuée

Cela conduit ainsi à définir un **gabarit** définissant des zones interdites et des zones dans lesquelles devront impérativement se situer les graphes représentant l'atténuation du filtre en fréquence. Suivant le type de réponse que l'on désire obtenir, on est amené à définir 4 familles de filtres :



Lorsque l'on veut dimensionner un filtre, on ne sait calculer analytiquement qu'un petit nombre de fonctions caractéristiques convenant à la réalisation d'un gabarit. Ces différentes fonctions fixeront les propriétés physiques du filtre (Butterworth, Tchebycheff, Bessel, Cauer).

2.5 Notion de Modulation

2.5.1 Principe

Le principe de modulation d'un signal est essentiellement utilisé pour la transmission des signaux. Il permet d'adapter le message à transmettre au canal de transmission.

Par exemple, en radio, le message transmis par voie hertzienne est un message audio dont le spectre sera compris dans la bande [20Hz, 20kHz]. La réception d'un tel signal nécessite des antennes dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du signal (en général de l'ordre de $\frac{1}{2}$).

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Exemple :

$$\text{Pour } f = 20\text{kHz} : \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{20 \cdot 10^3} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ m} = 15 \text{ km} \text{ !!!!!!!}$$

Ainsi, l'objectif est de se servir d'un signal de fréquence importante pour transmettre le message afin de réduire à des proportions raisonnables la taille des antennes. Le but de la modulation est donc de translaté le spectre d'un signal basses fréquences (BF) vers les hautes fréquences (HF). La radio, la télévision, les lignes téléphoniques utilisent le procédé de modulation. Le signal HF utilisé pour transporter le message est appelé la porteuse. Le message, dont on se sert pour moduler une des caractéristiques de la porteuse, est appelé le modulant. Si la porteuse est de forme sinusoïdale, elle accepte comme expression :

$$s_p(t) = U_p \cos(\omega_p t + \varphi) \text{ avec } \omega_p \gg 0$$

Pour transporter le message, on ne peut donc jouer que sur deux paramètres :

- l'amplitude U_p : on effectue alors une modulation d'*amplitude*
- la phase φ : on effectue alors une modulation angulaire (*phase* ou *fréquence*).

Remarques :

La démodulation est l'opération inverse de la modulation. Elle consiste à reconstruire le signal modulant à partir du signal modulé. La qualité d'une modulation est déterminée par la facilité à récupérer le signal modulant et par son immunité aux bruits.

2.5.2 Modulation d'amplitude

Le principe consiste à moduler l'amplitude de la porteuse $s_p(t)$ par le signal message $m(t)$:

$$s_m(t) = m(t) \cdot U_p \cos \omega_p t$$

Dans le cas d'école où le message à une forme sinusoïdale :

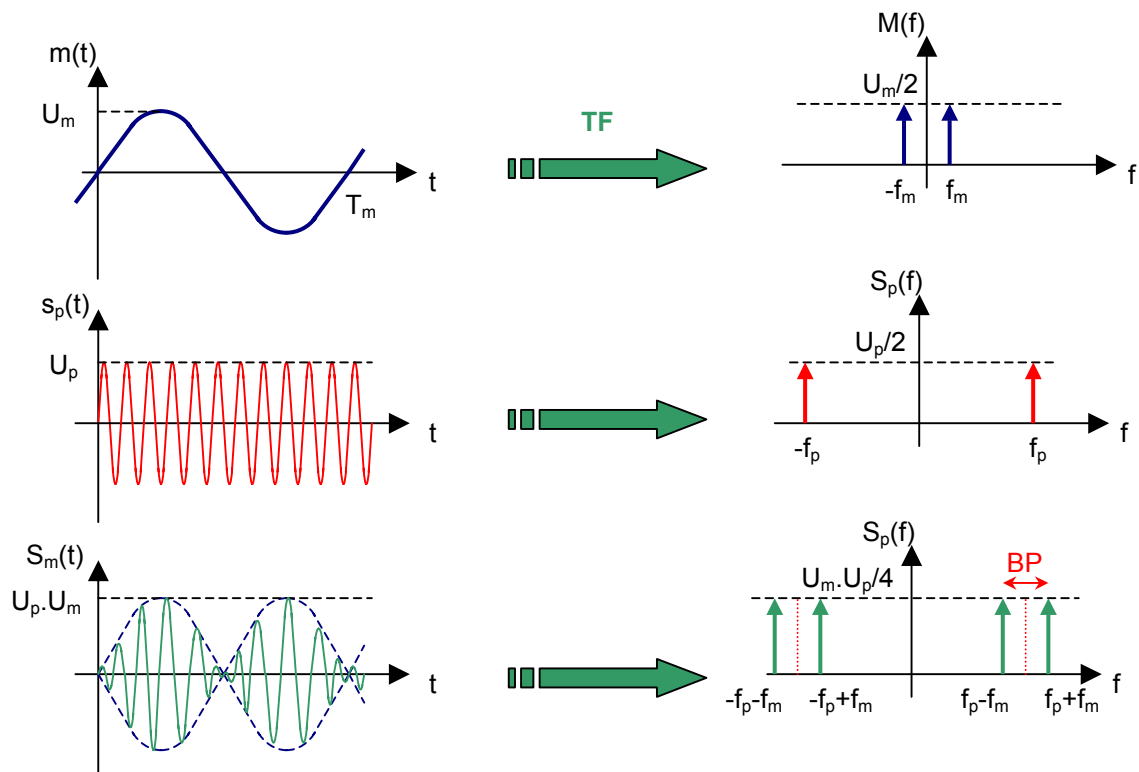
$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t \cdot U_p \cos \omega_p t$$

$$s_m(t) = \frac{U_m U_p}{2} \left\{ \cos [(\omega_m - \omega_p) t] + \cos [(\omega_m + \omega_p) t] \right\}$$

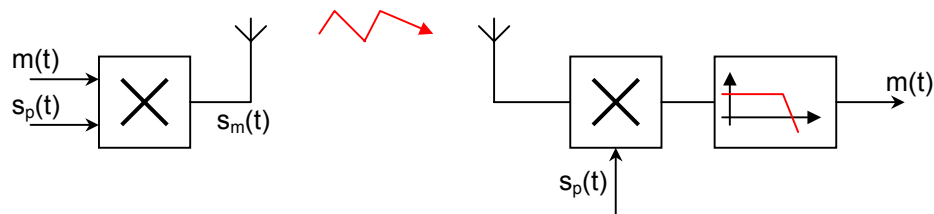
Son amplitude sera donc comprise entre $+U_m \cdot U_p$ et $-U_m \cdot U_p$.

Le spectre du signal modulé est donc :

$$S_m(f) = \frac{U_m U_p}{4} \left[\delta(f - f_m + f_p) + \delta(f - f_m - f_p) + \delta(f + f_m - f_p) + \delta(f + f_m + f_p) \right]$$



La modulation d'amplitude réalise donc une transposition en fréquence du signal message. Elle est réalisée à partir d'une simple multiplication. A noter que si l'on veut transmettre un signal de fréquence f_m , la bande passante nécessaire est de $2.f_m$. La récupération du message par démodulation implique de réaliser l'opération inverse. Il faut donc multiplier le signal modulé par la porteuse pour refaire une transposition en fréquence puis isoler le message par filtrage.



Mais fabriquer une porteuse de fréquence strictement identique est très difficile. Une solution consiste donc à transmettre la porteuse avec le message pour pouvoir facilement la reconstruire à la réception. On l'appelle la *modulation avec porteuse* et l'expression du signal modulé devient :

$$s_m(t) = [k \cdot m(t) + 1] U_p \cos \omega_p t$$

k est le taux de modulation.

C'est ce principe qui est retenu en radiodiffusion (AM, GO et PO).

Remarques :

On peut aussi :

- récupérer la partie résiduelle de la porteuse (qui, pour des raisons techniques, n'est jamais supprimée à 100 %) et amplifier celle-ci.
- transmettre périodiquement une information représentant la porteuse
- transmettre un multiple ou un sous-multiple de la fréquence de la porteuse

3 Numérisation

L'importance des systèmes numériques de traitement de l'information ne cesse de croître (radio, télévision, téléphone, instrumentation...). Ce choix est souvent justifié par des avantages techniques tels que la grande stabilité des paramètres, une excellente reproductibilité des résultats et des fonctionnalités accrues. Le monde extérieur étant par nature "analogique", une opération préliminaire de conversion analogique numérique est nécessaire. La conversion analogique numérique est la succession de trois effets sur le signal analogique de départ :

- l'échantillonnage pour rendre le signal discret
- la **quantification** pour associer à chaque échantillon une valeur
- le **codage** pour associer un code à chaque valeur.

3.1 Echantillonnage

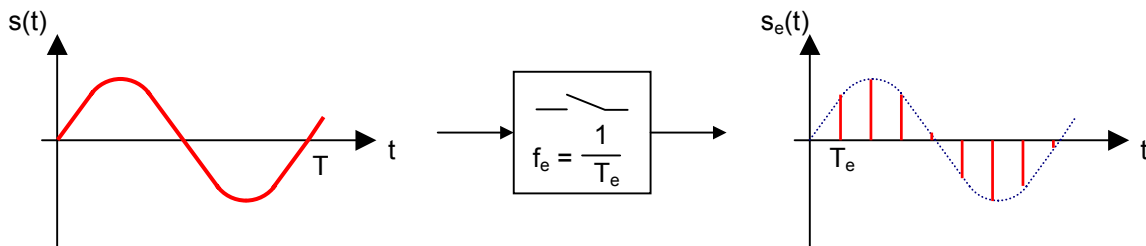
3.1.1 Définition

L'échantillonnage consiste à prélever à des instants précis, le plus souvent équidistants, les valeurs instantanées d'un signal. Le signal analogique $s(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeur discrètes :

$$s_e(t) = s(n.T_e) \text{ avec } n \text{ entier}$$

T_e : période d'échantillonnage.

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur.



3.1.2 Echantillonnage idéal

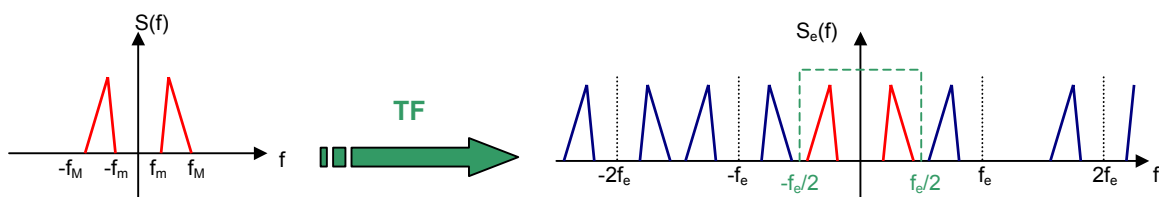
L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu $s(t)$ et d'un peigne de Dirac de période T_e .

$$s_e(t) = s(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = s(t) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - n T_e) = s(n T_e) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - n T_e)$$

Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - n f_e) \rightarrow \boxed{S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - n f_e)} \quad (\text{voir Annexe 1})$$

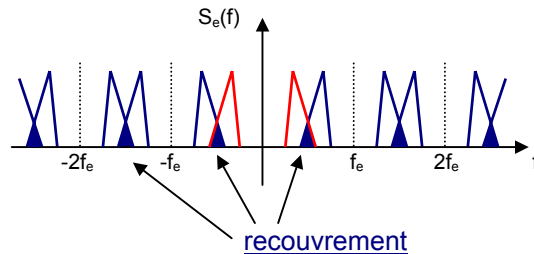
On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre du signal d'origine autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage.



Remarques :

❶ On voit sur le spectre du signal échantillonné qu'il est possible de restituer le signal original par un simple filtrage passe-bas.

❷ Si f_M , la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible car il va apparaître un recouvrement spectrale lors de l'échantillonnage. On dit qu'on est en sous-échantillonnage.



Le théorème de **SHANNON** montre que la reconstitution correcte d'un signal nécessite que la fréquence d'échantillonnage f_e soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des fréquences f_M du spectre du signal :

$$f_e > 2 f_M$$

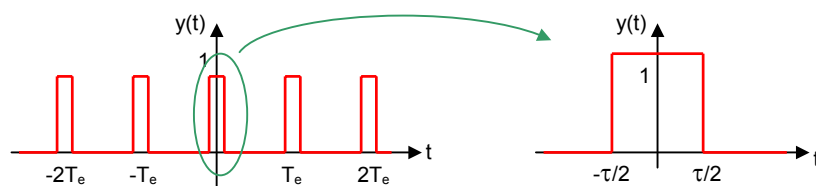
❸ Lorsqu'il y a recouvrement spectrale, nous avons vu qu'il était impossible de reconstruire correctement le signal. Pourtant dans la plupart des situations, le spectre du signal à échantillonner s'étale sur tout le domaine des fréquences (tout en diminuant du côté des hautes fréquences), mais il n'existe pas une fréquence f_{max} au-delà de laquelle l'énergie est nulle. Il y a donc un problème pour choisir la fréquence d'échantillonnage. On se fixe donc en pratique une f_{max} à partir de laquelle on estime la représentation de notre signal satisfaisante pour les applications que l'on veut en faire. Puis on effectue un filtrage passe-bas (à f_{max}) avant l'échantillonnage afin de remédier aux repliements de spectre. On appelle ce filtre un filtre antirepliement.

Exemple : c'est par exemple le cas de la parole. Le spectre des sons audibles s'étend jusqu'à environ 20kHz. Dans le cas des CD audio, le signal est échantillonné à 44.1 kHz alors que dans le cas du téléphone numérique le signal est échantillonné à 8 kHz seulement. En effet, en téléphonie, on estime que le message est compréhensible pourvu que les composantes basses fréquences soient transmises correctement alors que l'on veut conserver tous les harmoniques pour avoir un son de qualité en audio. On limite ainsi le spectre à 22.05 kHz pour un CD audio et à 4 kHz pour la téléphonie (3.4kHz en pratique).

❹ Si $f_e > 2f_c$, il y a sur-échantillonnage. Alors les motifs successifs obtenus par périodisation du spectre sont disjoints et éloignés l'un de l'autre. Le filtrage passe-bas pour la récupération du signal est facilité. Plus on prendra d'échantillons par période, plus le signal sera facile à reconstruire.

3.1.3 Echantillonnage réel

En pratique, l'échantillonnage s'effectue en commandant un interrupteur par un train d'impulsions étroites. Il est donc impossible d'obtenir des échantillons de durée quasiment nulle. La modélisation de l'échantillonnage par un peigne de Dirac est donc erronée. En fait, chaque impulsion va avoir une durée très courte τ . L'échantillonnage peut donc être modélisé par la multiplication du signal par une suite de fonction rectangle (ou porte) de largeur τ .



L'expression du signal d'échantillonnage devient donc :

$$y(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT_e}{\tau} \right) = \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) * \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

Et par conséquent, sa transformée de Fourier est égale à :

$$Y(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_e) \quad (\text{voir Annexe 1 et 2})$$

Comme l'expression du signal échantillonné est :

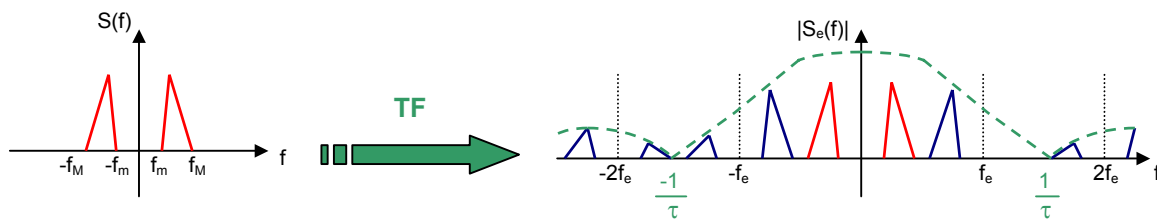
$$s_e(t) = s(t) \cdot y(t)$$

Sa transformée de Fourier devient :

$$S_e(f) = S(f) \times Y(f) = S(f) * \frac{\tau}{T_e} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\tau f) \cdot \delta(f - k f_e)$$

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - k f_e)$$

On retrouve la même allure de spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.



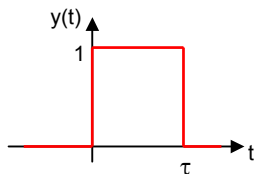
Remarques :

- ❶ Pour se rapprocher d'un échantillonnage idéal et qu'ainsi le signal soit facilement reconstituable, il faut que τ soit le plus petit possible.
- ❷ Dans le cas où τ est du même ordre de grandeur que f_e , il faudra $f_e \gg 2f_M$.

3.1.4 Echantillonnage-blocage

En pratique, on n'échantillonne pas un signal pour le reconstruire juste après. L'échantillonnage est utilisé pour prélever le signal à des instants multiples de T_e et ensuite convertir les échantillons sous forme d'un code binaire (8, 12, 16 bits, ...). Cette conversion est effectuée par l'intermédiaire d'un convertisseur analogique-numérique (CAN). Cette conversion n'est pas instantanée. Si le signal à convertir varie trop rapidement, il est nécessaire de procéder au blocage du signal pour avoir une conversion sans erreur. On utilise donc un échantillonneur-bloqueur qui mémorise la tension à convertir et la maintient constante pendant toute la durée de conversion.

L'effet de blocage peut être modélisé par une fonction porte décalée de $\tau/2$:



$$y(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - \frac{\tau}{2} - kT_e}{\tau} \right) = \text{rect} \left(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau} \right) * \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

L'échantillonnage-blocage consiste donc à la multiplication du signal par $y(t)$. La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc :

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - k f_e) \cdot e^{-j\pi f \tau}$$

Remarques :

Le spectre est identique au précédent. Le terme en $e^{-j\pi f \tau}$ traduit un déphasage entre le signal initial et le signal échantillonné. En principe, on maintient la valeur de l'échantillon sur toute la période d'échantillonnage donc $\tau = T_e$. Ainsi, pour $f = f_e$, on a un déphasage de $-\pi$.

3.2 Quantification

3.2.1 Définition

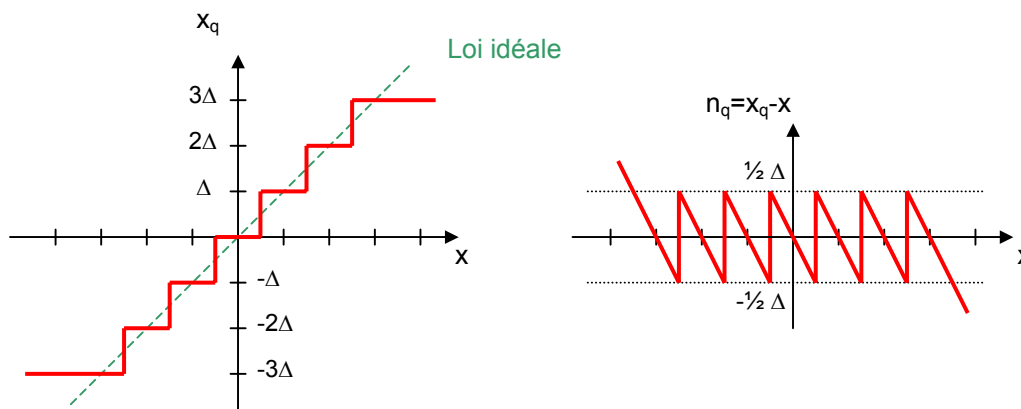
La quantification consiste à associer à une valeur réelle x quelconque, une autre valeur x_q appartenant à un ensemble fini de valeurs et ce suivant une certaine loi : arrondi supérieur, arrondi le plus proche, etc...

L'écart entre chaque valeur x_q est appelé pas de quantification.

Le fait d'arrondir la valeur de départ entraîne forcément une erreur de quantification que l'on appelle le bruit de quantification.

3.2.2 Quantification uniforme

La loi de quantification uniforme utilise un pas de quantification (Δ) constant entre chaque valeur x_q .



Le bruit de quantification n_q est dans ce cas un signal aléatoire. Ces caractéristiques sont donc définies par ses propriétés statistiques. On peut alors démontrer que la puissance du bruit de quantification est égale à :

$$P_{n_q} = \frac{\Delta^2}{12} \quad (\text{si sa densité de probabilité est uniforme})$$

Le rapport signal sur bruit dû à la quantification est donc égale à :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_S}{P_{n_q}}$$

La puissance du signal à quantifier est égale à sa valeur efficace au carré (*voir remarque*) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10 \log \left[12 \left(\frac{V_{\text{seff}}}{\Delta} \right)^2 \right]$$

Si l'on décompose la plage de variation V_{PE} du signal à quantifier en 2^n intervalles de largeur Δ (avec n le nombre de bits utilisés pour coder le signal quantifié).

Alors $V_{PE} = 2^n \times \Delta$ et $\Delta = \frac{V_{PE}}{2^n}$

Ainsi :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log 12 + 20 \log \left(2^n \frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right) = 10 \log 12 + 20 \log 2^n + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}}\right)$$

Ainsi, dans le cas d'un convertisseur analogique-numérique, chaque fois que l'on rajoutera un bit dans le résultat de conversion, on améliorera le rapport signal sur bruit dû à la quantification d'environ 6dB.

Remarque :

En traitement du signal, on considère la puissance d'un signal aux bornes d'une résistance de 1Ω . La puissance est donc égale au carré de la valeur efficace.

Exemple :

Si l'on veut numériser une sinusoïde et que l'on fixe $V_{PE} = 2 \cdot V_{max}$

Dans ce cas, $V_{seff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ et $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20 \log \left(\frac{V_{max}}{2\sqrt{2} V_{max}}\right)$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 1.77$$

3.3 Codage

Le codage consiste à associer à un ensemble de valeurs discrètes un code composé d'éléments binaires.

Les codes les plus connus : code binaire naturel, code binaire décalé, code complément à 2, code DCB, code Gray.

Exemple sur 4 bits :

Nbre	Binaire	Binaire décalé	DCB	Gray	Complément à 2
-8	/	0000	/	/	1000
-3	/	0101	/	/	1101
0	0000	1000	0000	0000	0000
1	0001	0001	0001	0001	0001
5	0101	0101	0101	0111	0101
10	1010	/	0001 0000	1111	/
15	1111	/	0001 0101	1000	/

4 Traitement du signal numérique

Le traitement numérique de l'information apporte de nombreux avantages techniques ainsi qu'une flexibilité accrue dans beaucoup de domaines. Le traitement du signal par transformée de Fourier pose cependant un certain nombre de problèmes. En effet un ordinateur ne peut traiter que des signaux numériques, ceux-ci sont obtenus après un *échantillonnage* et une *quantification*. Leur étude devra tenir compte des effets induits sur le spectre par ces deux techniques. De plus, un calcul de transformée de Fourier est une somme d'une infinité d'échantillons. Le temps nécessaire ainsi que la mémoire de l'ordinateur vont forcément emmener certaines contraintes à ce niveau.

4.1 Transformée de Fourier d'un signal discret

4.1.1 Définition

Un signal discret est défini par une suite d'échantillons espacés entre eux d'une période T_e . La transformée de Fourier appliquée à un signal discret $x[n]$ devient donc :

$$X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}}$$

Si cette série converge, la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x[n] = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(f) \cdot e^{2j\pi \frac{nf}{F_e}}$$

Remarques :

On vérifie bien que $X(f)$ est une fonction périodique de période F_e (à cause de l'échantillonnage). Si on remplace f par $(f + k.F_e)$:

$$e^{-2j\pi \frac{n(f+k.F_e)}{F_e}} = e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}} + e^{-2j\pi \frac{nk.F_e}{F_e}} = e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}}$$

4.1.2 Propriétés

	$x[n]$	$X(F)$
Linéarité	$\alpha.x(n) + \beta.y(n)$	$\alpha.X(f) + \beta.Y(f)$
Translation	$x(n-k)$	$e^{-2j\pi \frac{kf}{F_e}} X(f)$
	$e^{2j\pi \frac{nf_0}{F_e}} x(n)$	$X(f-f_0)$
Convolution	$x(n) * y(n)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$

4.2 Transformée de Fourier discrète

4.2.1 Fenêtrage

Avec un ordinateur, il est impossible de calculer la transformée de Fourier d'un signal discret. En effet il faudrait un temps et une mémoire infinis. Pour ces raisons, on est toujours amené à travailler avec un nombre fini de points N . Cela revient à dire que les signaux exploités numériquement sont toujours une troncature de signaux réels.

On construira donc un signal tronqué $x_T[n]$. Il résulte de la multiplication des échantillons de $x[n]$ par une **fenêtre d'analyse** (ou encore fenêtre de troncature) qui limitera $x_T[n]$ à N échantillons. En pratique, on calcule donc :

$$X_T(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{nf}{F_c}}$$

La fenêtre d'analyse est définie par une suite d'échantillons $y[n]$ tels que :

$$\begin{cases} x_T[n] = y[n] \cdot x[n] & \text{pour } 0 \leq n \leq (N-1) \\ x_T[n] = 0 & \text{pour } n < 0 \text{ et } n > (N-1) \end{cases}$$

Mais le fait de tronquer un signal peut notablement affecter son spectre.

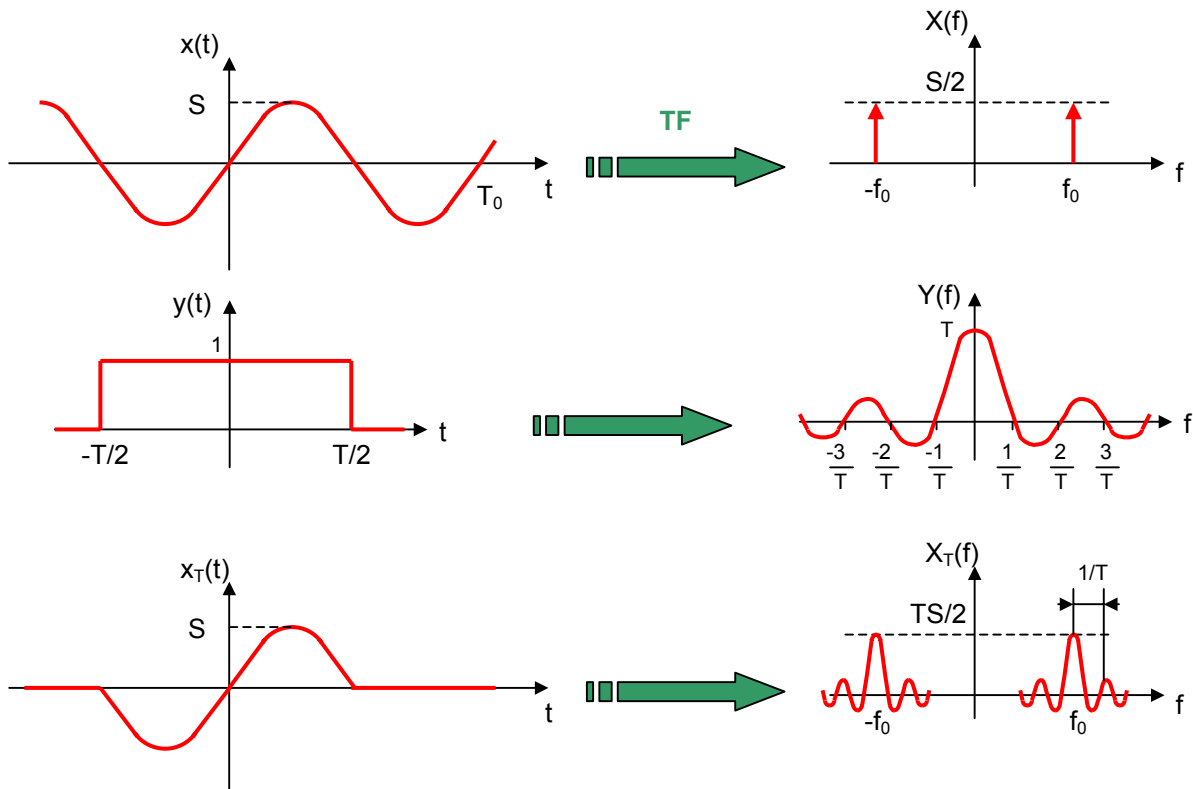
Exemple : troncature d'une sinusoïde par un fenêtrage rectangulaire.

Soit $x(t) = S \cos(2\pi f_0 t)$ et $y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

On sait que $X(f) = \frac{S}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ et que $Y(f) = T \text{sinc}(Tf)$

Donc si on effectue la troncature de $x(t)$ sur une durée T :

$$\begin{aligned} x_T(t) &= x(t) \cdot y(t) \\ X_T(f) &= X(f) * Y(f) \end{aligned}$$



Remarques :

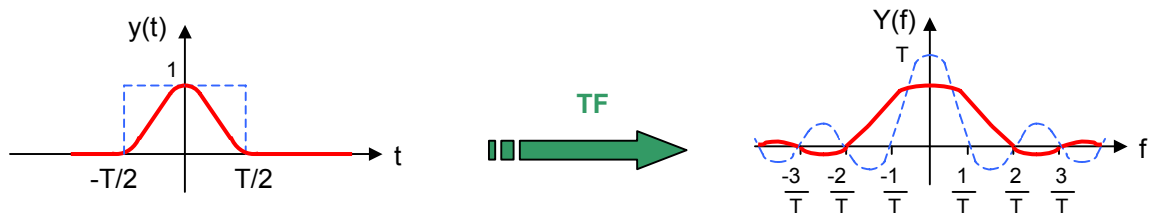
❶ On constate que le fait de tronquer le signal tend à élargir les raies contenues dans le spectre. Plus la fenêtre sera large, plus les raies seront étroites et tendront vers les Dirac originaux. On le conçoit aisément dans le domaine temporel puisque plus la fenêtre est large et plus le signal tronqué se rapproche du signal d'origine.

❷ Si on ne conserve qu'une période (environ) de la sinusoïde, les deux sinus cardinaux se chevaucheront bien avant d'avoir atteint des amplitudes négligeables. Ainsi, plus on voudra une résolution importante en fréquence plus il faudra conserver un nombre important de périodes temporelles du signal à analyser... La qualité de la représentation spectrale sera d'autant plus grande que la période d'acquisition T sera longue.

❸ La fenêtre rectangulaire n'est pas forcément la meilleure. Dans le domaine temporel, elle interrompt brusquement le signal à ces extrémités générant artificiellement des hautes fréquences. Dans le domaine fréquentiel, la fonction sinc a des lobes non négligeables loin de $f = 0$ qui déforme le spectre.

Afin de compenser ces défauts, toute une série de fenêtres ont été imaginées. Aucune n'est idéale, toutes ont leurs qualités et défauts suivant les applications voulues.

Par exemple, la fenêtre de Hanning présente dans le domaine fréquentiel des lobes secondaires qui deviennent vite négligeables, mais au prix d'un lobe principal plus large. Ainsi, le spectre sera moins précis au voisinage de f_0 mais moins bruité dans les hautes fréquences.



4.2.2 Echantillonnage en fréquence

En fait, lorsque l'on veut pouvoir représenter le spectre $X_T(f)$, il faut calculer $X_T(f)$ pour toutes les valeurs de f (f est une variable continue). Ceci est impossible avec un ordinateur ou un DSP qui ne peuvent traiter que des valeurs de f discrètes. Comme $X_T(f)$ est périodique de période F_e , on découpe donc cet intervalle en M parties égales et on ne calcule $X_T(f)$ que pour les multiples de F_e/M : on effectue un échantillonnage fréquentiel de pas $\Delta f = F_e/M$.

On remplace donc f par Δf et le calcul de la transformée de Fourier devient :

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n \cdot k \cdot \Delta f}{F_e}} \text{ pour } k = [0, 1, 2, \dots, M-1]$$

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n \cdot k}{M}} \text{ pour } k = [0, 1, 2, \dots, M-1]$$

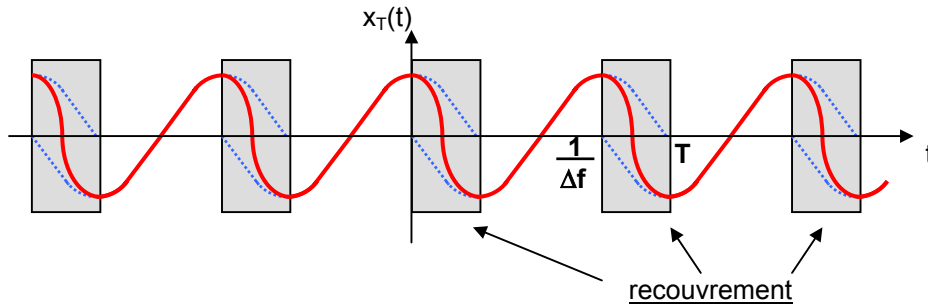
On vient ainsi d'introduire la **transformée de Fourier discrète**.

Le problème réside dans le choix du pas d'échantillonnage en fréquence et donc du choix de M . En effet, le fait d'échantillonner en fréquence revient à périodiser dans le domaine temporel la partie du signal qui a été tronquée :

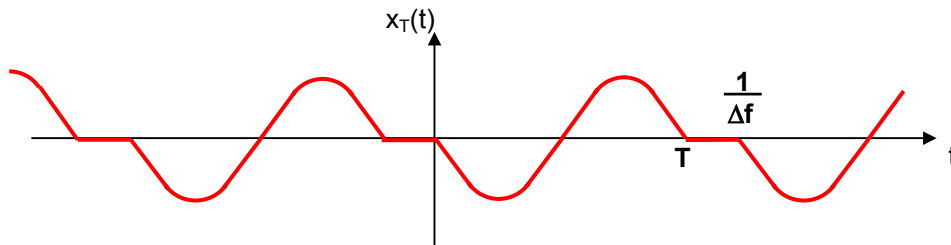
$$X_T[k] = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot \delta(f - k \cdot \Delta f) \quad \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} \quad \sum_{r \rightarrow -\infty}^{+\infty} x_T(t) \cdot \delta\left(t - \frac{r}{\Delta f}\right)$$

Ainsi, suivant le choix de Δf , plusieurs cas peuvent se présenter lors de la reconstitution du signal dans le domaine temporel à partir de son spectre échantillonné :

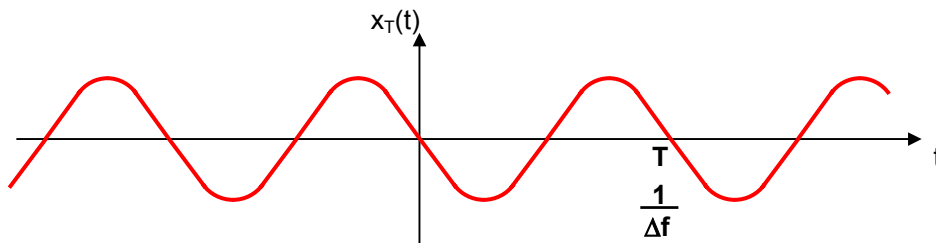
- **$\Delta f > 1/T$** : La résolution spectrale Δf est trop grande. On a un recouvrement dans le domaine temporel. C'est un peu Shannon à l'envers : si on choisit une résolution spectrale trop grande, on ne peut pas reconstituer le signal dans le domaine temporel correctement.



- **$\Delta f < 1/T$** : Il n'y aura plus de repliement temporel, mais des intervalles durant lesquels le signal dont on calcule le spectre sera nul...



- **$\Delta f = 1/T$** : On a un signal périodique idéal. On périodise la fenêtre temporelle choisie avant le calcul spectral.



En pratique, on choisira donc toujours Δf de telle sorte à avoir **$\Delta f = 1/T$** .

Comme $T = N \cdot T_e$ et $\Delta f = \frac{F_e}{M}$, on en déduit que $\frac{F_e}{M} = \frac{1}{N \cdot T_e} \Rightarrow M = N$:

Ainsi, la définition de la **transformée de Fourier discrète** devient :

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n \cdot k}{N}} \text{ pour } k = [0, 1, 2, \dots, N-1]$$

Remarques :

A F_e fixe, plus la durée d'acquisition sera longue et plus la résolution en fréquence sera fine.

A N fixe, plus F_e sera importante et plus la condition de Shannon sera respectée mais moins la résolution en fréquence sera fine et la durée d'acquisition longue.

4.3 Notion de transformée de Fourier rapide

Pour obtenir une valeur particulière de $X_T[k]$, il faut par exemple :

Pour $n = 0$:

$$X_T[k] = (x_T[0] \cdot \cos(0) - x_T[0] \cdot j \sin(0))$$

2 produits complexes et 1 somme complexes

Pour $n = 1$:

$$X_T[k] = (x_T[0] \cdot \cos(0) - x_T[0] \cdot j \sin(0)) + \left[x_T[1] \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - x_T[1] \cdot j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right]$$

4 produits complexes et 3 sommes complexes

Pour $n = N-1$:

2N produits complexes et 2(N-1) sommes complexes

Ainsi, pour obtenir les N valeurs de $X_T[k]$ il faut donc $2N^2$ multiplications et $2(N-1)N$ additions. Par exemple, un signal où $N=1024$ échantillons (soit 1ko en mémoire si chaque échantillon est codé sur 8 bits), le nombre de multiplications est de 2 097 152 et celui des additions de 2 095 104 !!!! On arrive très vite à des temps de calcul très longs. Si ces durées ne sont pas gênantes pour des traitements en temps différé, il n'en est pas de même en temps réel. En effet, plus le temps de calcul sera important et plus la fréquence maximale du signal à analyser sera réduite (Shannon).

Pour pouvoir utiliser la transformée de Fourier discrète en temps réel, on dispose d'algorithmes de calcul permettant d'obtenir les résultats beaucoup plus rapidement sous certaines conditions. Ces algorithmes sont connus sous le nom de Transformée de Fourier Rapide (TFR) ou Fast Fourier Transform (FFT). L'algorithme le plus connu est celui de Cooley-Tuckey.

4.3.1 Présentation à l'algorithme de Cooley-Tuckey

On pose :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk} \quad \text{avec } W_N = e^{\frac{-2j\pi}{N}}$$

Propriétés de W_N :

- $W_N^{2nk} = e^{\frac{-2j\pi nk}{N/2}} = W_{N/2}^{nk}$
- $W_N^{nk+N/2} = e^{\frac{-2j\pi(nk+N/2)}{N}} = -W_N^{nk}$

La condition d'utilisation est d'avoir un nombre d'échantillons puissance de 2 : $N=2^m$

Si on effectue un dédoublement temporel en séparant les indices paires et impaires :

$$\begin{cases} x_1[n] = x[2n] \\ x_2[n] = x[2n+1] \end{cases}$$

En exploitant les propriétés de W_N , on trouve alors :

$$\text{Pour } 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad \begin{cases} X[k] = X_1[k] + W_N^k \cdot X_2[k] \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] = X_1[k] - W_N^k \cdot X_2[k] \end{cases}$$

Remarques :

Le coût de calcul passe de l'ordre de N^2 à $N \log_2(N)$.

Annexe 1 : Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

La décomposition en série de Fourier donne :

$$\text{SdF}[\delta_{T_e}(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi f_e t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi \frac{t}{T_e}} \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{T_e/2} s(t) e^{-jn2\pi f_e t} dt$$

$$\text{d'où } S_n = \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{T_e/2} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \cdot e^{-jn2\pi f_e t} dt$$

sur $\left[\frac{-T_e}{2}, \frac{T_e}{2} \right]$, $\delta_T(t) = 1$ pour $t = 0$ et 0 ailleurs.

$$\text{donc } S_n = \frac{1}{T_e} e^{-jn2\pi f_e t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_e}$$

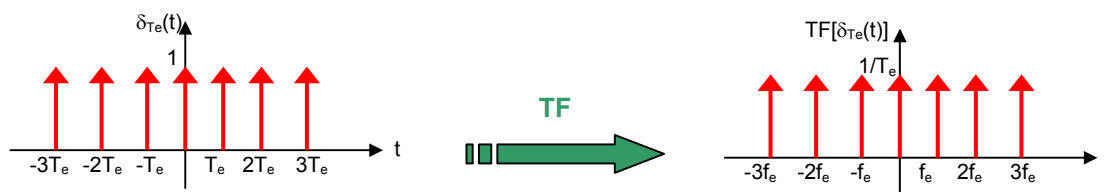
donc la décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac vaut :

$$\text{SdF}[\delta_{T_e}(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} e^{jn2\pi f_e t} = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_e t}$$

Comme $\text{TF}[e^{-2j\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0)$:

$$\text{TF}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T_e} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (en temps) est un peigne de Dirac (en fréquence).



Annexe 2 : Transformée de Fourier de la fonction porte

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La transformée de Fourier donne :

$$\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\text{d'où } \text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \left[\frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{j2\pi f} \left[e^{j2\pi f T/2} - e^{-j2\pi f T/2} \right]$$

$$\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{1}{\pi f} \left[\frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{2j} \right] = \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

$$\text{comme } \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \text{sinc}(Tf)$$

La transformée de Fourier d'une fonction porte est un sinus cardinal.

