

***Introduction à la
commande vectorielle
des machines
asynchrones***

Patrick BRUNET

LTEG Henri BRISSON

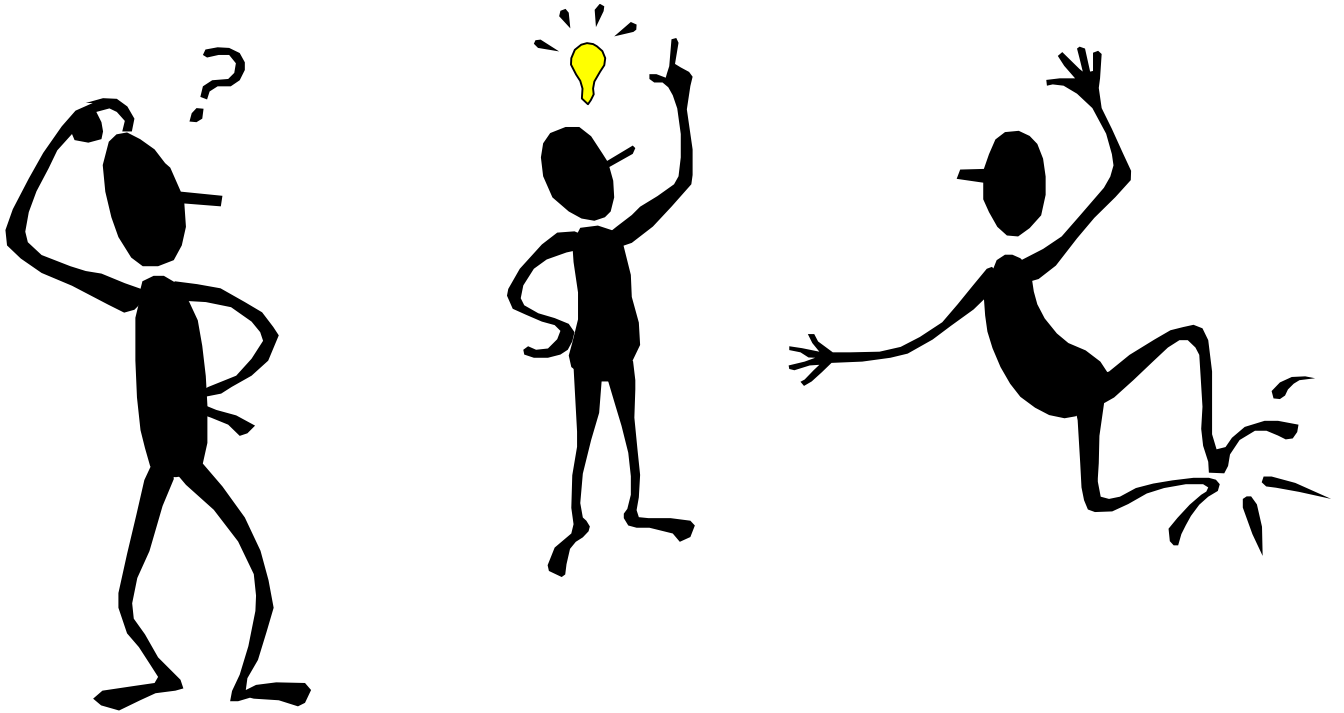
25 Avenue Henri BRISSON

18108 VIERZON

 02 48 52 74 00

mél : patbrune@wanadoo.fr

SOMMAIRE

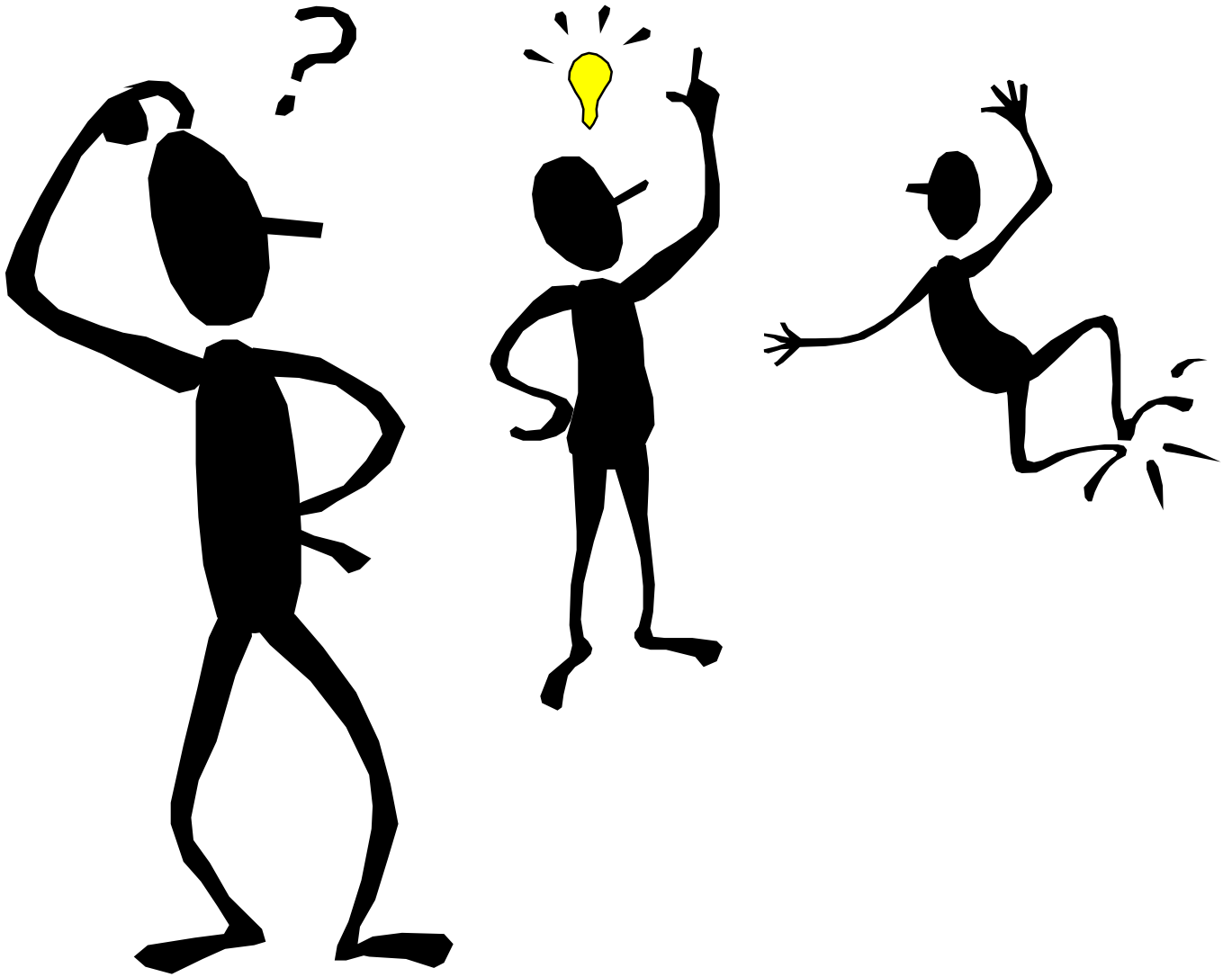


A. La commande vectorielle, oui...
mais pourquoi faire ?

B. Les modélisations de la machine
asynchrone

C. Principe d'une commande à flux
orienté

D. Annexes



A

**La commande
vectorielle, oui... mais
pourquoi faire ?**

A1. INTRODUCTION

Tous les fabricants de variateurs de vitesse, qu'ils soient industriels ou bien distributeurs de matériel à usage pédagogique proposent des variateurs pour machine asynchrone. Historiquement, sont apparus sur le marché des variateurs dits à « $U/f = \text{constante}$ » et plus récemment les **variateurs à contrôle vectoriel de flux avec ou sans capteur**.

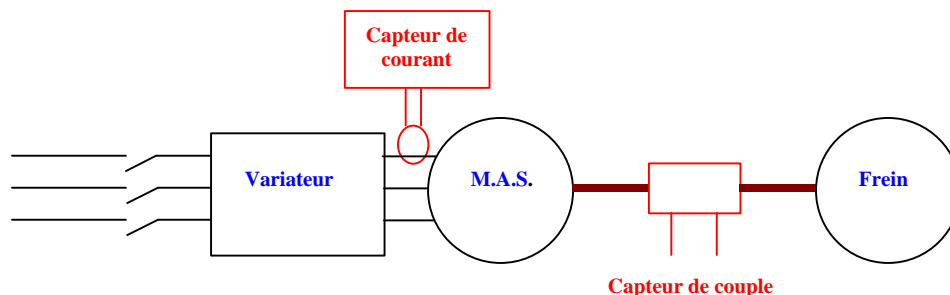
Aujourd'hui **contrôle vectoriel** fait mode et il faut être prudent car sous l'argument commercial se cache peut-être un convertisseur à $U/f = \text{constante}$ amélioré...

Au-delà de cet aspect purement commercial, on peut se poser la question de ce que l'on peut présenter à des étudiants BAC+2 en Electrotechnique pour qu'au moins ils aient une idée des performances comparées des différents types de variateurs, ceci pour leur

permettre de faire un choix judicieux de matériel en fonction de l'application à mettre en œuvre. **Ainsi, s'il s'agit de démarrer tous les matins un moteur asynchrone sans faire varier sa vitesse, le recours au contrôle vectoriel serait stupide !**

La présentation théorique du variateur en U/f ne pose pas de problème à partir de la modélisation classique de la M.A.S. pour les étudiants. Par contre, détailler la théorie du contrôle vectoriel de flux n'est pas à la portée d'étudiants BAC+2 en Electrotechnique. Mais, il est possible de mettre en évidence de façon expérimentale les performances comparées de plusieurs variateurs.

Les résultats expérimentaux présentés ci-dessous ont été obtenus à partir du schéma de principe suivant :



On dispose d'un réseau triphasé **220V/50 Hz**.

Le moteur (CEGELEC) a une puissance nominale de **1.5 kW**, un courant nominal de **6.4 A** et une tension nominale de **220 V**.

Le couple développé par le moteur est mesuré par un **couplemètre** dynamique de marque Vibrometer. Son étendue de mesure est de **+/- 100 N.m**. Il dispose de 2 sorties analogiques permettant d'obtenir :

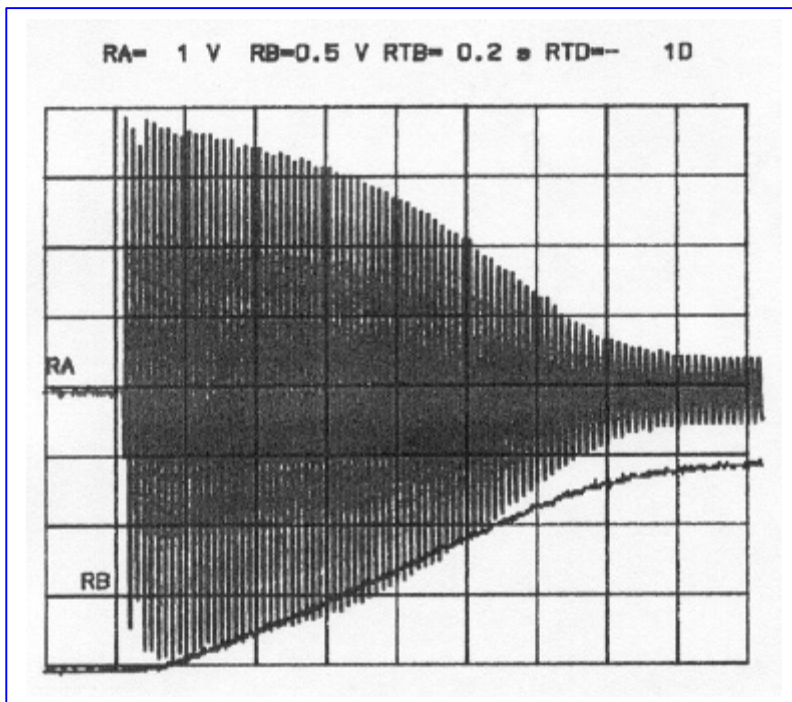
- une image de la **vitesse de rotation** avec un facteur d'échelle de **10 V pour 10000 tr/min**,
- une image du **couple instantané** avec un facteur d'échelle de **5 V pour 100 N.m**.

Il est installé entre le moteur et un frein à courant de Foucault utilisé ici uniquement en charge inertielle.

Enfin un **capteur de courant** permet de visualiser le courant fourni par le variateur avec un facteur d'échelle de **1 V pour 10 A**.

A2. DEMARRAGE DIRECT DU MOTEUR

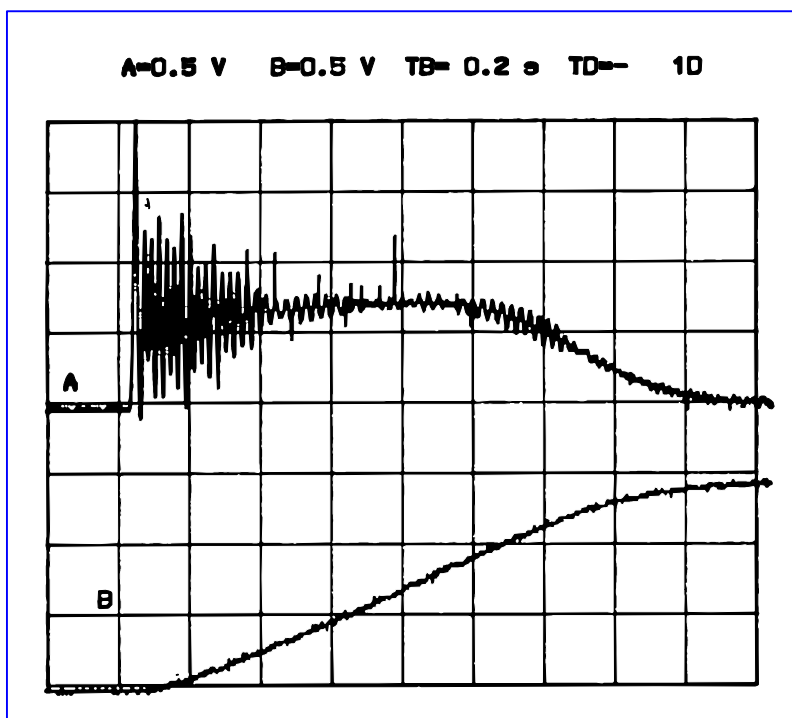
Il est obtenu en fermant le disjoncteur de tête et en supprimant le variateur. On a limité par un autotransformateur la tension réseau à 190 V pour ne pas saturer le moteur.



L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du courant moteur (voie RA) et de la vitesse (voie RB).

On note le classique appel de courant lors de la mise sous tension du moteur (valeur instantanée maximale de 40 A environ). Il serait évidemment encore plus grand sous la tension nominale de 220V.

La montée en vitesse est quasi linéaire au début du démarrage. La durée de mise en vitesse (environ 2 s) est déterminée par l'inertie totale autour de l'arbre de rotation, le moteur n'étant pas chargé. La vitesse atteinte est proche de 1500 tr/mn (vitesse de synchronisme), le moteur étant à vide.



L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du couple instantané (voie A) et de la vitesse (voie B).

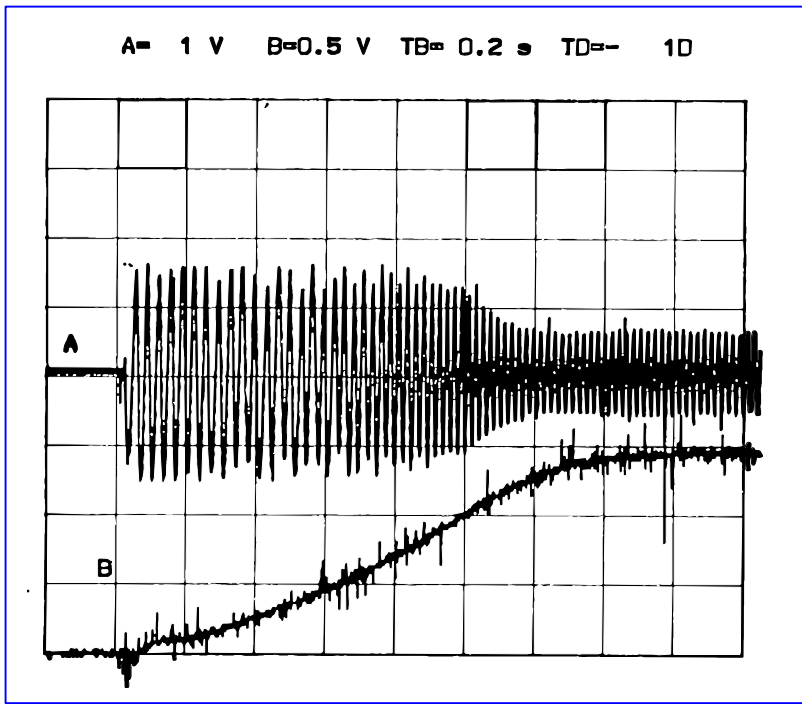
On note les *oscillations* du couple instantané lors de la mise sous tension pendant une durée de 0.6 s. Ainsi le couple instantané monte à 40 N.m alors que le couple nominal du moteur est de l'ordre de 10 N.m. Bien sûr, ces oscillations seraient encore plus importantes sous tension nominale.

Il est important de bien noter ces oscillations car le choix du couplemètre dynamique devra être fait à partir de celles-ci et non du couple nominal sous peine de destruction lors d'un tel démarrage.

A la fin de la phase de démarrage, le couple s'annule puisque le moteur n'est pas chargé.

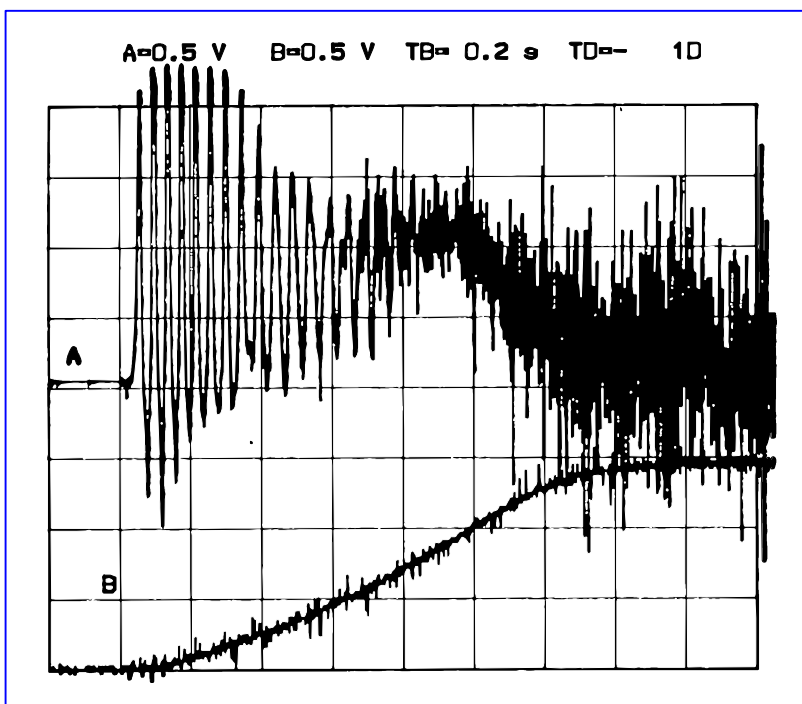
A3. DEMARRAGE AVEC UN VARIATEUR A $U/f = \text{constante}$

On utilise directement le réseau 220 V. Le variateur utilisé est un *Varial VNTA de CEGELEC*. La limitation de courant a été réglée à 150% du courant nominal de 6 A du variateur. Aucune rampe d'accélération n'a été imposée. La consigne de vitesse a été réglée à 1500 tr/mn.



L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du courant moteur (voie A) et de la vitesse (voie B).

L'appel de courant au démarrage est bien maîtrisé par le réglage de la limitation en courant du variateur. La montée en vitesse est un peu plus rapide que lors du démarrage direct car on fonctionne ici à tension nominale.



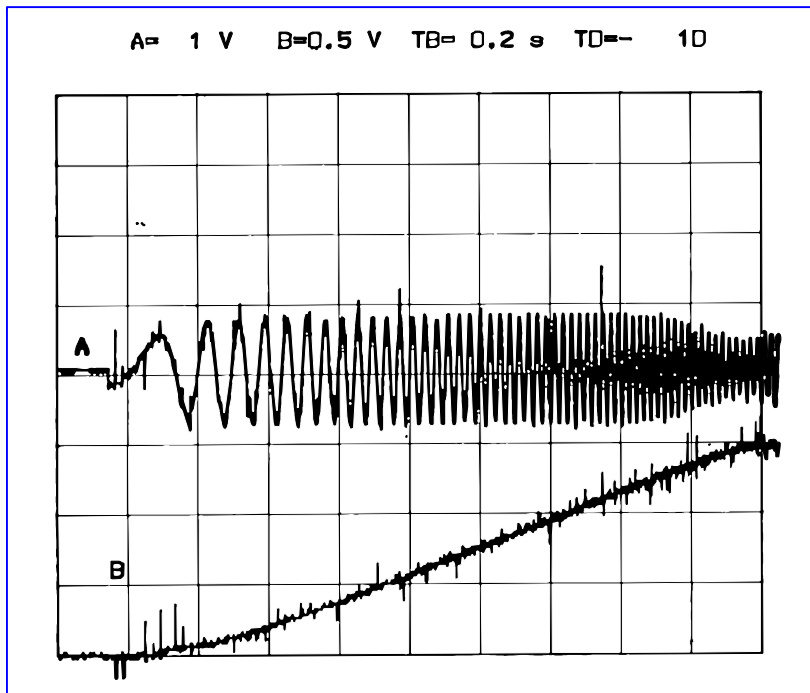
L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du couple instantané (voie A) et de la vitesse (voie B).

On note que les oscillations du couple instantané n'ont pas disparues bien au contraire. Le variateur à $U/f = \text{constante}$ de par son principe (contrôle dit scalaire) *n'est pas apte à maîtriser le couple instantané*. Il faut que les régimes transitoires électriques aient disparu pour qu'il puisse convenablement travailler.

Le signal issu du couplemètre est parasité sur la dernière partie de l'oscillogramme. Nous pensons que ceci est dû au découpage MLI de la tension fournie par le variateur qui rayonne sur le câble du couplemètre (problème de CEM).

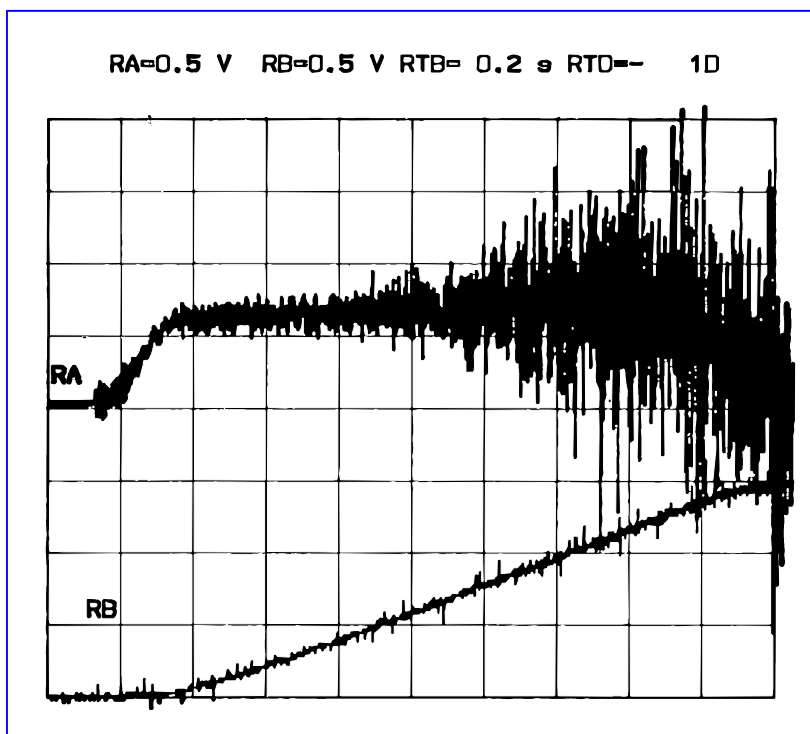
A4. DEMARRAGE AVEC UN VARIATEUR A CONTROLE VECTORIEL DE FLUX

On utilise directement le réseau 220 V. Le variateur utilisé est un *Varial VNTV de CEGELEC*. La limitation de courant a été réglée à 150% du courant nominal de 6 A du variateur. Aucune rampe d'accélération n'a été imposée. La consigne de vitesse a été réglée à 1500 tr/mn. Le codeur incrémental installé en bout d'arbre du moteur doit être raccordé sur le variateur.



L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du courant moteur (voie A) et de la vitesse (voie B).

L'appel de courant au démarrage est maîtrisé et l'on peut noter l'évolution progressive de la fréquence délivrée par l'onduleur du variateur au cours du démarrage.



L'oscillogramme ci-contre représente l'évolution du couple instantané (voie RA) et de la vitesse (voie RB).

On note que les oscillations du couple instantané ont cette fois disparu lors du démarrage.

Le contrôle vectoriel de flux permet donc de traiter les régimes transitoires ce que ne permettait pas de faire le variateur précédent.

Le variateur à contrôle vectoriel de flux est apte à maîtriser le couple instantané. Bien sûr cela se « paie » puisque le codeur permettant de repérer la position du rotor du moteur doit être raccordé.

A5. CONCLUSION

Les démarreurs de moteurs (non étudiés ci-dessus) sont utilisés pour limiter l'appel de courant lors de la mise sous tension, et en aucun cas faits pour contrôler le couple instantané.

Les relevés précédents mettent en évidence les spécificités de chaque famille de variateur de vitesse et les performances que l'on peut en attendre. Ils doivent permettre de décrypter les catalogues « constructeur ».

Prenons l'exemple de **l'ALTIVAR 66** proposé par **SCHNEIDER** : il s'agit d'un variateur de vitesse pour moteur asynchrone présenté avec 2 options.

Dans la version de base, le constructeur indique une « *gamme de vitesse de 1 à 20* ». Cela signifie que si la vitesse de synchronisme est de 1500 tr/min, le constructeur garantit les performances de $\frac{1500}{20} = 75 \text{tr} / \text{min}$ jusqu'au synchronisme.

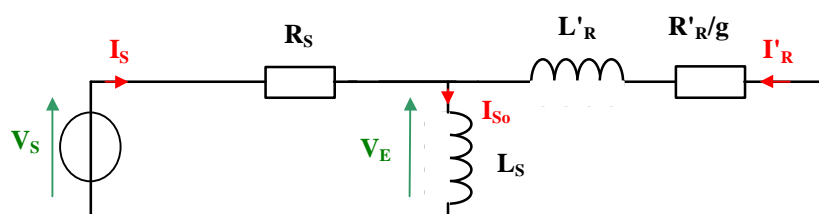
Il s'agit alors d'un variateur à $U/f = \text{constante}$ qui possède plusieurs lois de commande en U/f suivant les applications souhaitées (couple constant ou variable). Y figurent également quelques améliorations possibles comme la *compensation « RI »* qui permet de ne pas négliger l'influence de la résistance statorique (*) et la *compensation de glissement (**)*. On parle alors de variateur à $E/f = \text{constante}$. Mais, il ne faudra pas lui demander de performances au-dessous de 75 tr/min.

Toutefois, il existe une option dite « **SFVC** » : *sensorless flux vectoriel control* en Anglais ou *contrôle de flux sans capteur* en français, qui permet de faire passer la « *gamme de vitesse de 1 à 100* ».

On pourra donc descendre jusqu'à 15 tr/min. L'algorithme de commande de l'onduleur est plus complexe que dans le cas d'une commande en U/f classique, mais il n'est toujours pas question de demander du couple à l'arrêt c'est à dire à vitesse nulle.

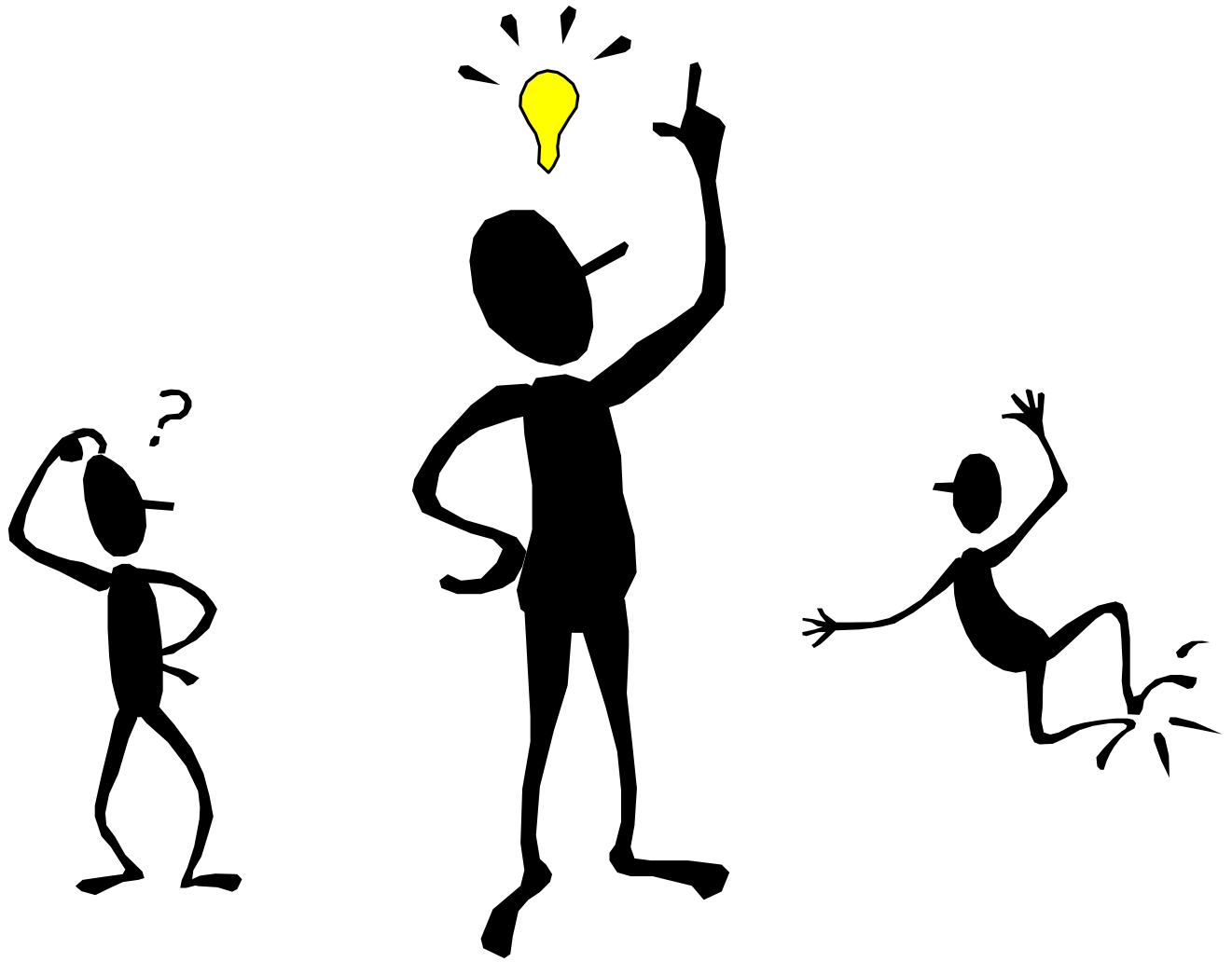
Si l'application l'exige, on passera alors à **l'ALTIVAR 66 à contrôle vectoriel avec capteur** (il s'agit d'un capteur de position du rotor : codeur incrémental). La carte de commande doit alors être adaptée pour recevoir et traiter les informations du codeur. Dans ce cas la « *gamme de vitesse passe de 1 à 1000* ».

Avec un tel produit, il est alors possible d'exiger du couple à l'arrêt, mais il aura fallu en payer le prix en rajoutant le codeur à la facture !



(*) : La commande en U/f se justifie à partir du schéma équivalent classique de la machine asynchrone en négligeant la résistance statorique. Si l'approximation est bien justifiée à grande vitesse ($R_s I_s$ négligeable devant la tension V_s), elle ne l'est plus à petite vitesse puisque $R_s I_s$ garde à peu près la même valeur alors que V_s est beaucoup plus faible ($U/f = \text{cste}$)

(**): La compensation de glissement permet de mieux maintenir la vitesse constante du moteur entre un fonctionnement à vide et un fonctionnement en charge. La fréquence de l'onduleur est alors supérieure en charge pour tenir compte du glissement.



B

Les modélisations de la machine asynchrone

B1. INTRODUCTION

Tout problème de motorisation avec une machine électrique peut être schématisé de la sorte :



Le choix de la motorisation se fera en fonction de différents critères :

- coût de la fabrication
- facilité du réglage
- problèmes de maintenance

La machine à courant continu a régné en maître jusqu'à ces dernières années car bien que le coût de fabrication soit assez élevé, les possibilités de réglage (*découplage naturel entre le courant dans l'induit et le flux*) sont simples à mettre en œuvre et faisaient la différence même si la maintenance pose problème (balais, collecteur).

Depuis quelques années, grâce à la mise au point de *calculateurs « temps réel » rapides*, on exploite de plus en plus les machines asynchrones. Les machines à cage sont de fabrication simple et ne posent pas de problèmes de maintenance. Par contre, *on ne savait pas réaliser le découplage courant-flux* car on ne peut jouer que sur les caractéristiques de la tension du moteur : il n'y a pas d'excitation ! C'est maintenant chose faite.

Par ailleurs, pour étudier une machine électrique, le but de l'électrotechnicien *est d'élaborer un modèle* aussi fin que possible qui puisse rendre compte de la réalité. On sait que le dimensionnement d'une motorisation se fait en prenant en compte les *régimes transitoires* (mise en vitesse) qui sont plus contraignants que les régimes établis. Il importe donc que les modèles soient utilisables aussi bien en régime statique que dynamique. C'est facile à faire pour le moteur à courant continu, ça l'est beaucoup moins pour le moteur asynchrone.

De nombreuses applications industrielles nécessitent *un contrôle de vitesse ou de position*. La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r$$

où C_e représente la *somme des couples moteurs appliqués*, C_r la *somme des couples résistants* et J le *moment d'inertie* de l'ensemble des parties tournantes. On obtient ainsi la vitesse par :

$\Omega = \Omega_o + \frac{1}{J} \int_0^t (C_e - C_r) dt$, ce qui montre que le contrôle de la vitesse (ou de la position qui est la primitive de la vitesse) passe par le contrôle du couple.

La machine à courant continu à excitation séparée est bien adaptée à un contrôle du couple car il suffit de contrôler son courant induit. Le but à atteindre est de faire la même chose avec la machine asynchrone.

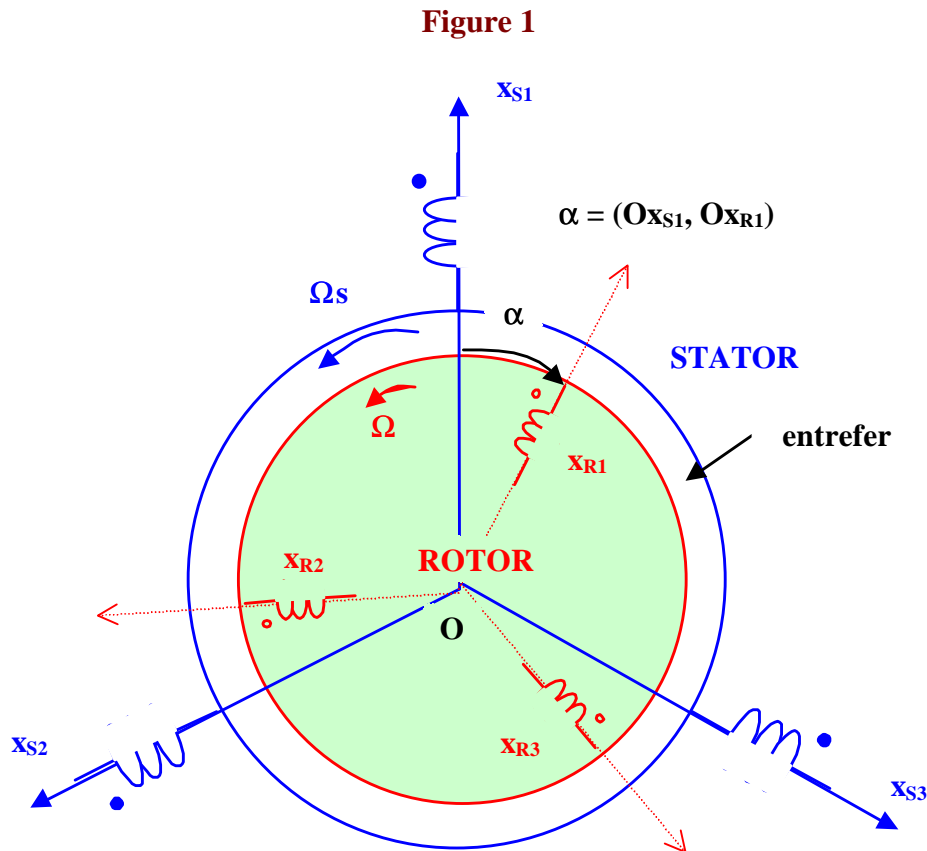
B2. MODELISATION EN REGIME PERMANENT

Bibliographie :

1. Cours d'Electrotechnique : T1 Machines tournantes à courants alternatifs par JL DALMASSO (Collection DIA/BELIN)
2. Cours d'Electrotechnique : T3 Machines à courant alternatif par Cl TOUSSAINT et M LAVABRE (Collection DUNOD)
3. Modélisation et commande de la machine asynchrone par JP CARON et JP HAUTIER (Editions TECHNIP)

B2.1. PRINCIPE DU FONCTIONNEMENT

1.1. Description sommaire de la machine (schéma avec $p = 1$)



Le **stator** d'une machine asynchrone est identique à celui d'une machine synchrone : 3 enroulements couplés en étoile ou en triangle sont alimentés par un système de tensions équilibrées. Il va en résulter (**Théorème de FERRARIS**) la création d'un *champ magnétique glissant* dans l'entrefer de la machine. La vitesse de glissement de ce champ par rapport au **stator** est :

$$\Omega_s = \omega_s / p$$

où ω_s désigne la pulsation du réseau d'alimentation triphasé statorique et p le nombre de bobines de chaque bobinage. p désigne également le nombre de paires de pôles du champ (une paire étant constituée d'un pôle Nord et d'un pôle Sud).

Remarque : le **stator** étant soumis à un champ variable doit être feuilleté pour limiter les pertes par courant de Foucault.

Le **rotor** de la machine supporte un bobinage semblable à celui du **stator** : bobinage triphasé à même nombre de pôles que celui du **stator**. Ces 3 bobinages sont couplés en étoile et court-circuités sur

eux-mêmes. Ce type de **rotor** est dit **bobiné** mais on peut envisager un **rotor** plus sommaire constitué de barres conductrices court-circuitées par un anneau conducteur à chaque extrémité. On peut alors montrer que ce **rotor** à cage d'écureuil se comporte comme un **rotor** bobiné. Le **rotor** tourne à une vitesse angulaire Ω à ne pas confondre avec Ω_s .

En régime permanent Ω et Ω_s sont des constantes mais ça n'est pas le cas en régime variable.

Remarque : Sur la **Figure 1**, les axes 1, 2, 3 correspondent aux axes des phases **statoriques** et **rotoriques**.

Posons :

$$\alpha = (\mathbf{Ox}_S, \mathbf{Ox}_R)$$

l'angle fait par une phase **rotorique** par rapport à la phase **statorique** correspondante (*c'est pourquoi on a omis l'indice*). Lorsque la machine tourne, cet angle α est une fonction du temps. En régime permanent, c'est la **dérivée de α** qui est une constante.

1.2. Analogie avec un transformateur

Supposons les bobinages **rotoriques** en circuit ouvert et le **rotor** fixe. Lorsque le **stator** est alimenté, un flux variable engendré par les courants **statoriques** va traverser chacun des bobinages **rotoriques** : il y a **couplage magnétique** entre les enroulements. On peut donc définir un coefficient d'inductance mutuelle entre le bobinage 1 du **stator** et chaque bobinage du **rotor**.

Ainsi, on aura $m_1 = m \cdot \cos(\alpha)$ si $p=1$ où m représente la valeur maximum de m_1 obtenue

quand les bobinages 1 **stator** et **rotor** sont en regard ($\alpha = 0$).

De la même façon, on aura $m_2 = m \cdot \cos(\alpha + 2P/3)$ et $m_3 = m \cdot \cos(\alpha + 4P/3)$. On récupérera donc aux bornes de chaque enroulement secondaire une tension variable de pulsation ω_s lorsque le rotor est fixe et dont la valeur efficace dépend du décalage entre les bobinages. La machine asynchrone peut être appelée **transformateur à champ tournant**.

1.3. Principe du fonctionnement de la machine asynchrone

1.3.1. Cas d'un fonctionnement hyposynchrone

Les 3 bobinages du secondaire sont court-circuités et le **rotor** tourne à une vitesse $\omega < \omega_s$ avec $\omega < \omega_s$.

Le **rotor** perçoit donc un champ glissant à la vitesse relative $\omega_R = \omega_s - \omega$.

Il en résulte donc la création d'une fem induite dans les bobinages **rotoriques**. Cette fem est à la pulsation $\omega_R = p \cdot \omega_R = p \cdot (\omega_s - \omega) = p \cdot \omega_s - p \cdot \omega$

$$\omega_R = \omega_s - p \cdot \omega \text{ ou } \omega_s = p \cdot \omega + \omega_R$$

La fréquence **rotorique** est : $f_R = p \cdot n_R = p \cdot (n_s - n)$ en désignant par n la fréquence de rotation du **rotor** et n_s celle du champ glissant.

La valeur efficace de la fem est $E_R = (P/\sqrt{2}) K_{BR} N_R f_R F_P$

avec K_{BR} : facteur de bobinage d'un enroulement **rotorique**

N_R : nombre de brins de chaque enroulement **rotorique**

F_P : le flux sous un pôle du champ glissant

Cette fem court-circuitée sur l'enroulement va donner naissance à un courant (dont l'intensité est limitée par l'impédance de ce dernier). L'interaction entre ce courant et le champ glissant va donner naissance à des forces s'exerçant sur les brins du **rotor** dont le moment par rapport à l'axe de rotation constituera le **couple** de la machine. On notera que ce couple n'existe que si la fem est non nulle c'est à dire si f_R est non nulle : le **rotor** ne doit pas tourner au **synchronisme** pour qu'il y ait couple d'où le nom de **machine asynchrone**.

Définition : on appelle **glissement** la grandeur : $g = (n_s - n)/n_s = (\omega_s - \omega)/\omega_s$

Cette grandeur sans dimension s'exprime en % . On a $f_R = g \cdot f_s$ ou $\omega_R = g \cdot \omega_s$.

La fem $E_R = (P/\sqrt{2}) K_{BR} N_R g f_s F_P$ est donc directement proportionnelle au glissement.

1.3.2. Cas d'un fonctionnement hypersynchrone

Dans ce cas, on a $\omega > \omega_s$.

$$\omega_R = p \cdot \omega - \omega_s = p \cdot \omega - p \cdot \omega_s$$

$$\omega_R = p \cdot \omega - \omega_s \text{ ou } \omega_s = p \cdot \omega - \omega_R$$

En résumé quel que soit le fonctionnement :

$$\omega_s = p \cdot \omega \pm \omega_R$$

+ : pour un fonctionnement moteur **hyposynchrone**

- : pour un fonctionnement générateur **hypersynchrone**

Dans un fonctionnement classique sur réseau industriel, la pulsation ω_s est bien-sûr imposée, mais si on alimente la machine avec un onduleur, il est possible de faire varier ω_s pour mieux contrôler la machine.

Remarque : finalement c'est l'unique source d'énergie (alimentation du stator) qui crée le champ glissant et le courant induit. il n'y a pas de découplage comme avec une machine à courant continu ou une machine synchrone avec les 2 sources d'énergie dont une spécifique au champ : l'excitation.

B2.2. SCHEMA EQUIVALENT à une phase de la machine EN REGIME PERMANENT

Ce schéma est établi à partir de l'analogie avec le transformateur

2.1. Notations

On suppose les enroulements **statoriques** primaires couplés en étoile. La machine est alimentée par un système triphasé de tensions équilibrées.

Au primaire (**stator**) les grandeurs caractéristiques sont :

- V_S : valeur efficace de la tension appliquée sur un enroulement de phase
- ω_S : pulsation de cette tension
- R_S : résistance d'un enroulement
- L_S : inductance de fuite d'un enroulement

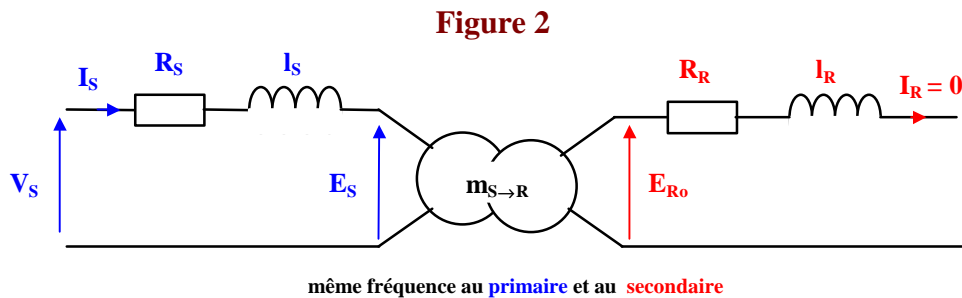
- E_S : fem développée aux bornes du bobinage
 $E_S = (P/\dot{\Omega})K_{BS}N_S f_S F_P$

Au secondaire (**rotor**) les grandeurs caractéristiques sont :

- $\omega_R = g \cdot \omega_S$: pulsation des fem et courants rotoriques
- R_R : résistance d'un enroulement
- L_R : inductance de fuite d'un enroulement
- E_R : fem développée aux bornes du bobinage
 $E_R = (P/\dot{\Omega})K_{BR}N_R f_S g F_P$

2.2. Schéma équivalent à une phase du moteur rotor ouvert

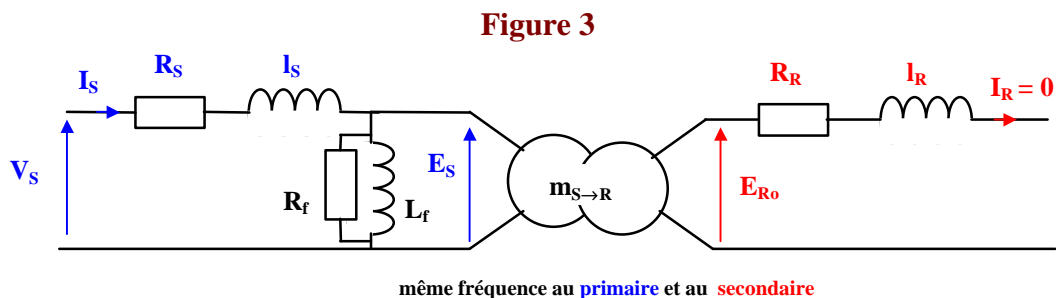
Dans ce cas, le **rotor** n'est pas entraîné : $W = 0$ ou $g = 1$. La fréquence **rotorique** est donc aussi f . On peut donc dessiner un schéma équivalent de type transformateur comme suit :



Le rapport de transformation m (*nombre sans dimension*) est défini par

$$m_{S \rightarrow R} = \frac{K_{BR} N_R}{K_{BS} N_S}$$

Pour prendre en compte l'existence de l'entrefer et des pertes fer du moteur, le modèle peut être affiné en rajoutant l'ensemble $R_f // L_f$ comme indiqué sur la **Figure 3**.



2.3. Schéma équivalent **rotor** fermé

Dans ce cas $W^1 0$ et $g^1 1$. Si le secondaire est court-circuité, on peut écrire :

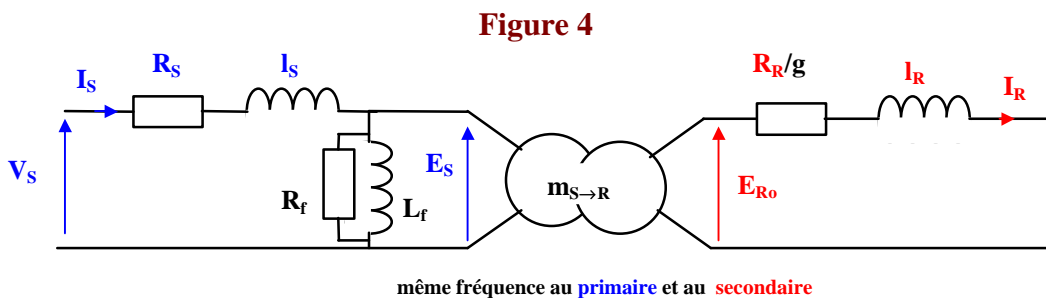
$$\underline{E}_R = (R_R + jg\omega_s l_R) \underline{I}_R$$

où les amplitudes complexes sont à la fréquence $g\omega_s$ et où \underline{E}_R a une valeur efficace proportionnelle à g .

En divisant par g , on obtient :

$$\underline{E}_R/g = (R_R/g + j\omega_s l_R) \underline{I}_R = \underline{E}_{R0}$$

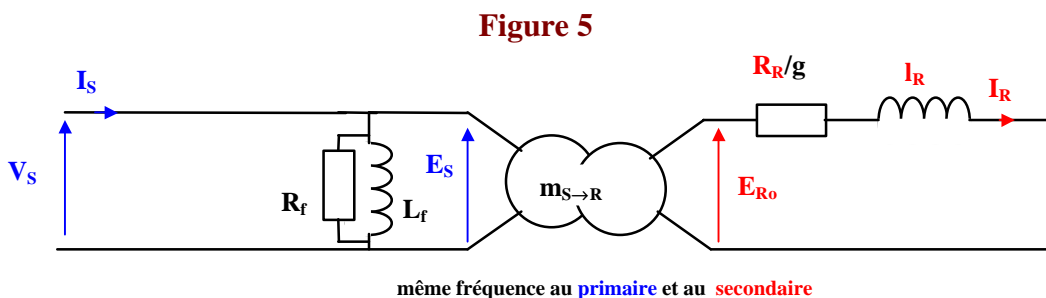
On constate alors que le rapport \underline{E}_R/g ne dépend plus de g et a la même valeur que dans un fonctionnement à **rotor** ouvert : \underline{E}_{R0} . Par ailleurs, la pulsation apparaît comme étant la même que celle du **primaire**. On peut donc adopter le schéma du transformateur modifié comme suit :



En réalité, ce schéma n'est justifié que pour les tensions. Or, les 2 ronds imbriqués représentent un transformateur parfait pour les tensions *et les courants*.

Pour justifier ce schéma pour les courants, on peut remarquer que si la chute de tension dans l'impédance $R_S + j\omega_s l_S$ au **primaire** est faible, on a pratiquement $V_S \gg E_S = (P/\dot{\Omega})K_{BS}N_S f_S F_P$. Cette expression montre que F_P est imposé par la tension d'alimentation V_S . La machine asynchrone *fonctionne à flux forcé* sous réserve que l'approximation énoncée plus haut soit correcte.

Ceci complète l'analogie avec le transformateur. On en déduit un schéma simplifié par cette approximation :



2.4. Conclusion

Le schéma équivalent établi ci-dessus résulte de la modélisation du transformateur. On définit un schéma équivalent pour une phase du moteur, mais ce schéma n'a de sens que si le moteur est triphasé, sinon le théorème de Ferraris ne s'applique plus.

Signification physique de la résistance R_R/g :

On constate que le schéma est purement électrique et qu'il ne comporte pas la traduction de la transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique. On peut toutefois écrire :

$$\frac{R_R}{g} = R_R + \frac{R_R}{g} - R_R = R_R + R_R \left(\frac{1-g}{g} \right)$$

Le 1er terme R_R de la dernière égalité représente la résistance réelle de l'enroulement alors que le 2ème $R_R \left(\frac{1-g}{g} \right)$ est une résistance fictive qui traduit la transformation de l'énergie. C'est pourquoi on l'appelle parfois *résistance motionnelle*.

On pourrait définir également un schéma équivalent en faisant disparaître le transformateur par la technique habituelle en divisant l'impédance du secondaire par le carré du rapport de transformation.

B2.3. SCHEMA EQUIVALENT à une phase de la machine EN REGIME PERMANENT

Ce schéma est établi à partir des coefficients d'inductance

Bibliographie :

1. Conférence de JP HAUTIER ET JP CARON aux journées «3EI » de 1993
2. Modélisation et commande de la machine asynchrone par JP CARON et JP HAUTIER (Editions TECHNIP)

3.1. Hypothèses simplificatrices

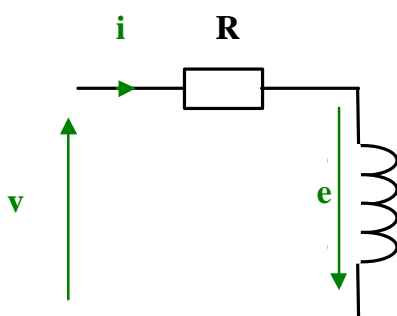
Le circuit magnétique de la machine n'est pas saturé et l'on néglige les pertes fer.

De ce fait, tous les coefficients d'inductance propre sont constants et les

coefficients d'inductance mutuelle ne dépendent que de la position des enroulements.

3.2. Loi des mailles matricielle

Figure 6



La machine possède 6 enroulements (3 au stator et 3 au rotor) couplés magnétiquement.

Pour chacun d'eux on peut écrire une équation tirée de la **Figure 6** du type :

$$v = Ri - e = Ri - \frac{dj}{dt}$$

où j représente le flux total à travers l'enroulement.

Pour l'ensemble des enroulements **statoriques**, on écrira en notation matricielle:

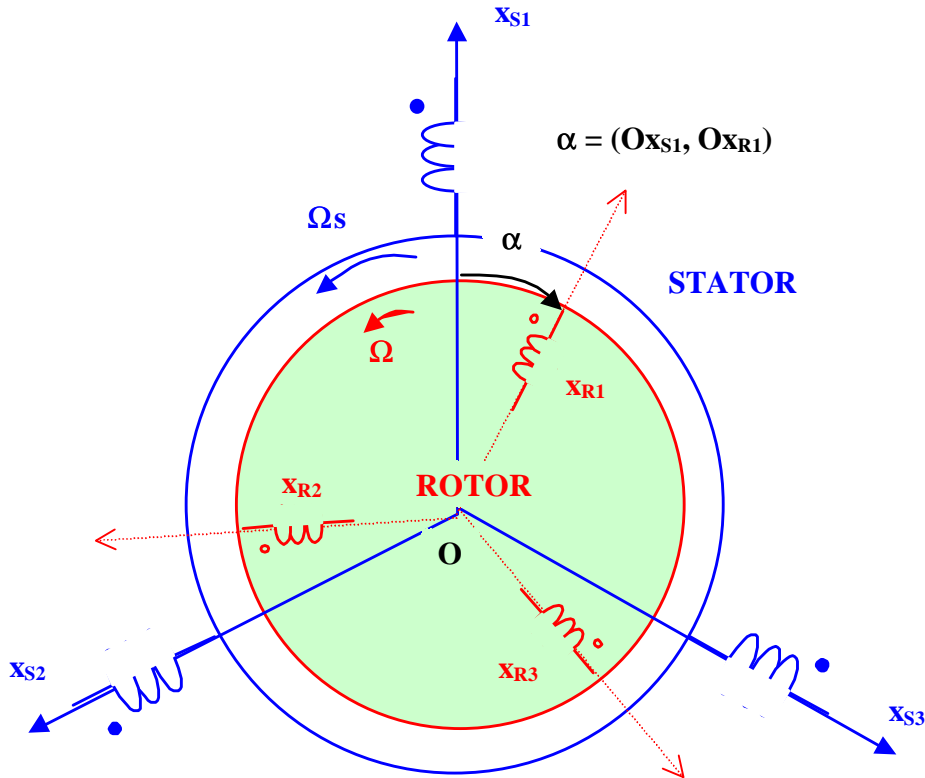
$$\begin{pmatrix} v_{S1} \\ v_{S2} \\ v_{S3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{S1} \\ \mathbf{j}_{S2} \\ \mathbf{j}_{S3} \end{pmatrix}$$

Pour l'ensemble des enroulements **rotoriques**, on écrira en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{R1} \\ \mathbf{j}_{R2} \\ \mathbf{j}_{R3} \end{pmatrix}$$

3.3. Equations des flux

Figure 7



On désigne par :

- l_s : le coefficient d'inductance propre d'un enroulement **statorique** (on ne confondra pas avec la présentation donnée dans le paragraphe précédent qui n'a rien à voir puisqu'il s'agissait d'une inductance de fuite)
- m_s : le coefficient d'inductance mutuelle avec chacun des 2 autres bobinages **statoriques** (on ne confondra pas non plus avec un rapport de transformation : nombre sans dimension)
- m_1, m_2, m_3 : les coefficients d'inductance mutuelle avec les 3 bobinages **rotoriques**.

Compte tenu du schéma ci-dessus, on écrira :

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{SR} \cdot \cos(Ox_{S1}, Ox_{R1}) = m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) \\ m_2 &= m_{SR} \cdot \cos(Ox_{S1}, Ox_{R2}) = m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} + 2P/3) = m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4P/3) \\ m_3 &= m_{SR} \cdot \cos(Ox_{S1}, Ox_{R3}) = m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} + 4P/3) = m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2P/3) \end{aligned}$$

où m_{SR} représente la valeur *maximale* des coefficients d'inductance mutuelle **stator-rotor** obtenue lorsque les bobinages en question sont en regard l'un de l'autre.

L'expression du flux total à travers le bobinage **statorique 1** sera la suivante :

$$\mathbf{j}_{S1} = l_S \cdot i_{S1} + m_S (i_{S2} + i_{S3}) + m_1 \cdot i_{R1} + m_2 \cdot i_{R2} + m_3 \cdot i_{R3} \quad (3.1)$$

L'écriture matricielle ci-dessous résume les 3 équations de flux **statoriques** :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{S1} \\ \mathbf{j}_{S2} \\ \mathbf{j}_{S3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_S & m_S & m_S \\ m_S & l_S & m_S \\ m_S & m_S & l_S \end{pmatrix}}_{[\mathbf{L}_S]} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) \\ m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) \\ m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) \end{pmatrix}}_{[\mathbf{M}_{SR}]} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{pmatrix}$$

$[\mathbf{L}_S]$: matrice [3,3] est appelée matrice inductance du **stator** et $[\mathbf{M}_{SR}]$: matrice [3,3] également, est la matrice inductance mutuelle entre le **stator** et le **rotor**. $[\mathbf{M}_{SR}]$ est une matrice circulante en ce sens que la 2^{ème} ligne est obtenue à partir de la 1^{ère} en décalant d'un cran vers la droite chaque terme.

De façon similaire, on aura au **rotor** :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{R1} \\ \mathbf{j}_{R2} \\ \mathbf{j}_{R3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_R & m_R & m_R \\ m_R & l_R & m_R \\ m_R & m_R & l_R \end{pmatrix}}_{[\mathbf{L}_R]} \begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) \\ m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) \\ m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & m_{SR} \cdot \cos(\mathbf{a}) \end{pmatrix}}_{[\mathbf{M}_{RS}]} \begin{pmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{pmatrix}$$

$[\mathbf{L}_R]$: matrice [3,3] est appelée matrice inductance du **rotor** et $[\mathbf{M}_{RS}]$: matrice [3,3] également, est la matrice inductance mutuelle entre le **rotor** et le **stator**.

On notera que la matrice des mutuelles du **rotor** est obtenue en **transposant** celle du **stator**.

3.4. Etude en régime permanent

Dans ce cas, \mathbf{W} et \mathbf{W}_S sont des constantes.

Les tensions **statoriques** forment un système équilibré à la pulsation \mathbf{w}_S :

$$\begin{aligned} v_{S1} &= V_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t) \\ v_{S2} &= V_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3) \\ v_{S3} &= V_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 4\Pi/3) \end{aligned}$$

Les courants **statoriques** forment un système triphasé déphasé :

$$\begin{aligned} i_{S1} &= I_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - \mathbf{b}_S) \\ i_{S2} &= I_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3 - \mathbf{b}_S) \\ i_{S3} &= I_S \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 4\Pi/3 - \mathbf{b}_S) \\ \text{avec } \mathbf{b}_S &= (i_{S1}, v_{S1}) \end{aligned}$$

Les courants **rotoriques** forment un système triphasé à la pulsation \mathbf{w}_R :

$$\begin{aligned} i_{R1} &= I_R \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - \mathbf{b}_R) \\ i_{R2} &= I_R \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - 2\Pi/3 - \mathbf{b}_R) \\ i_{R3} &= I_R \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - 4\Pi/3 - \mathbf{b}_R) \end{aligned}$$

Dans l'équation des flux, l'angle \mathbf{a} qui donne la position du **rotor** par rapport au **stator** est une fonction du temps puisqu'il y a *glissement*. On écrira $\mathbf{a} = \mathbf{w}t$ en supposant qu'à $t = 0$ les axes du **stator** et du **rotor** soient coïncidents. $\mathbf{w} = p \cdot \mathbf{W}$ prend en compte le nombre de pôles de la machine. Les éléments de la matrice des mutuelles sont donc aussi fonction du temps. En reprenant l'équation (3.1) ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{S1} &= l_S \cdot i_{S1} - m_S \cdot i_{S1} + m_1 \cdot i_{R1} + m_2 \cdot i_{R2} + m_3 \cdot i_{R3} \\ &\text{car } i_{S2} + i_{S3} = -i_{S1} \end{aligned}$$

On pose :

$$l_S - m_S = L_S : \text{inductance cyclique statorique}$$

Le mot *cyclique* signifie ici que l'on prend en compte la contribution des 3 phases **statoriques** même si le flux correspondant $L_S \cdot i_{S1}$ semble ne provenir que du courant i_{S1} .

$$\mathbf{j}_{S1} = L_S \cdot i_{S1} + (m_1 \cdot i_{R1} + m_2 \cdot i_{R2} + m_3 \cdot i_{R3})$$

Calculons $A = (m_1 \cdot i_{R1} + m_2 \cdot i_{R2} + m_3 \cdot i_{R3})$ avec $\alpha = \omega \cdot t$

$$A = m_{SR} \cdot I_R [\cos(\mathbf{w}t) \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - \mathbf{b}_R) + \cos(\mathbf{w}t - 4\Pi/3) \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - \mathbf{b}_R - 2\Pi/3) + \cos(\mathbf{w}t - 2\Pi/3) \cdot \cos(\mathbf{w}_R t - \mathbf{b}_R - 4\Pi/3)]$$

$$A = \frac{3}{2} m_{SR} \cdot I_R \cdot \cos((\mathbf{w} + \mathbf{w}_R)t - \mathbf{b}_R) = \frac{3}{2} m_{SR} \cdot I_R \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - \mathbf{b}_R)$$

où l'on constate que A est à la même pulsation que le 1er terme de \mathbf{j}_{S1} .

On pose :

$$M_{SR} = 3/2 m_{SR} : \text{inductance mutuelle cyclique}$$

Finalement, l'expression du flux devient :

$$\mathbf{j}_{S1} = L_S \cdot I_S \cos(\mathbf{w}_S t - \mathbf{b}_S) + M_{SR} \cdot I_R \cos(\mathbf{w}_S t - \mathbf{b}_R)$$

En utilisant la notation complexe habituelle aux grandeurs sinusoïdales à la pulsation \mathbf{w}_S , on a en omettant l'indice :

$$\underline{\mathbf{E}}_S = L_S \underline{\mathbf{I}}_S + M_{SR} \underline{\mathbf{I}}_R \quad (3.2)$$

De même, la loi des mailles devient :

$$\underline{\mathbf{V}}_S = R_S \underline{\mathbf{I}}_S + j \mathbf{w}_S \underline{\mathbf{E}}_S \quad (3.3)$$

Au **rotor**, on pourra écrire pour les flux :

$$\underline{\mathbf{E}}_R = L_R \underline{\mathbf{I}}_R + M_{SR} \underline{\mathbf{I}}_S \quad (3.4)$$

Ainsi que la loi des mailles :

$$0 = R_R \underline{\mathbf{I}}_R + j \mathbf{w}_S \underline{\mathbf{E}}_R \quad (3.5)$$

3.5. Schéma équivalent en régime permanent : modèle à inductances couplées

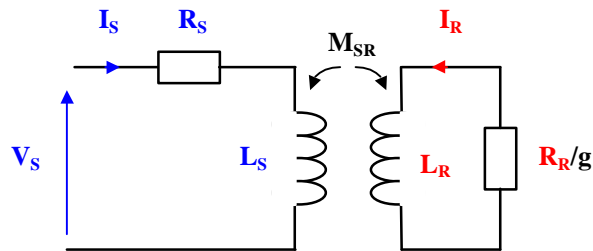
En reprenant les équations (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) précédentes on peut écrire :

$$\underline{V}_S = R_S \underline{I}_S + j\omega_S L_S \underline{I}_S + j\omega_S M_{SR} \underline{I}_R$$

$$0 = (R_R/g) \underline{I}_R + j\omega_S L_R \underline{I}_R + j\omega_S M_{SR} \underline{I}_S$$

On en déduit un schéma aux inductances couplées :

Figure 8



Tel quel, ce schéma fait penser à un transformateur sans que l'on puisse reconnaître le schéma de la Figure 5. On ne confondra surtout pas M_{SR} avec le rapport de transformation m .

EXERCICE : montrer que le rapport de transformation $m_{S\rightarrow R}$ est égal à M_{SR}/L_S

3.6. Schéma équivalent en régime permanent : modèle à inductances réparties

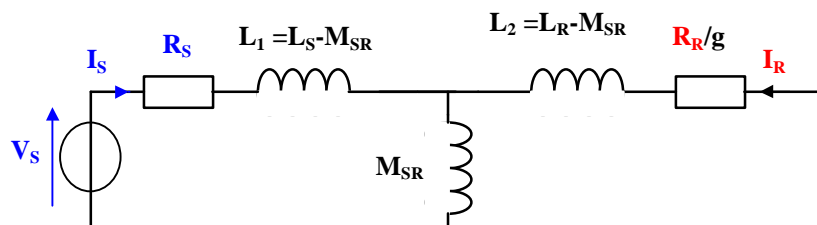
Les équations grisées ci-dessus peuvent être réécrites comme suit :

$$\underline{V}_S = R_S \underline{I}_S + j\omega_S (L_S - M_{SR}) \underline{I}_S + j\omega_S M_{SR} (\underline{I}_R + \underline{I}_S)$$

$$0 = (R_R/g) \underline{I}_R + j\omega_S (L_R - M_{SR}) \underline{I}_R + j\omega_S M_{SR} (\underline{I}_S + \underline{I}_R)$$

Ces équations permettent de dessiner le schéma Figure 9 ci-dessous :

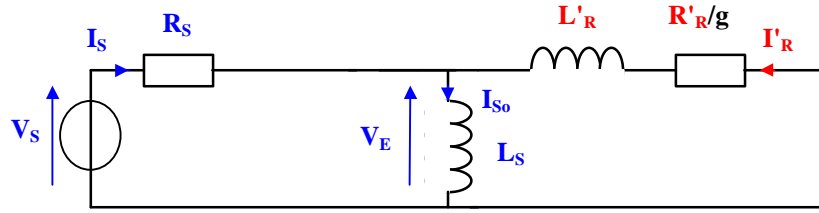
Figure 9



L_1 est appelée inductance cyclique de fuite du stator et L_2 inductance cyclique de fuite du rotor. Dans un moteur sans fuites de flux ces valeurs seraient nulles !

3.7. Schéma équivalent en régime permanent : modèle à fuites totalisées au rotor

Figure 10



Si la machine tourne au synchronisme ($g = 0$), les 2 schémas de la **Figure 9** et de la **Figure 10** doivent être équivalents, ce qui donne la valeur de l'inductance verticale : L_S . Compte tenu de l'équation (3.3) : $\underline{V}_S = R_S \underline{I}_S + j\omega_S \underline{F}_S$, le terme $j\omega_S \underline{\Phi}_s$ s'identifie à \underline{V}_E .

Il est alors possible d'écrire : $\underline{F}_S = L_S \underline{I}_{S0}$ où \underline{I}_{S0} est le courant absorbé à vide ($g = 0$) sur la **Figure 10**.

Les nouvelles grandeurs I'_R , L'_R et R'_R sont, elles, à définir.

On a $\underline{V}_E = j\omega_S \underline{F}_S$ et $\underline{F}_S = L_S \underline{I}_S + M_{SR} \underline{I}_R$: équation (3.2)

Il vient :

$$I_S = \frac{\Phi_S}{L_S} - \frac{M_{SR}}{L_S} I_R = I_{S0} - I'_R$$

ce qui permet d'identifier I'_R :

$$I'_R = \frac{M_{SR}}{L_S} I_R$$

Essayons maintenant d'identifier les éléments : L'_R et R'_R en repartant de la loi des mailles rotorique : $0 = (R_R/g) \underline{I}_R + j\omega_S L_R \underline{I}_R + j\omega_S M_{SR} \underline{I}_S$

$$j\omega_S I_S = -\frac{I_R}{M_{SR}} \left(\frac{R_R}{g} + j\omega_S L_R \right), \text{ soit en reportant } \underline{I}_S \text{ dans l'expression de } \underline{V}_E$$

$$V_E = j\omega_S \Phi_S = j\omega_S (L_S I_S + M_{SR} I_R) = -L_S \frac{I_R}{M_{SR}} \left(\frac{R_R}{g} + j\omega_S L_R \right) + j\omega_S M_{SR} I_R \text{ ce qui permet d'exprimer } \underline{V}_E$$

uniquement à partir de \underline{I}_R :

$$V_E = -I_R \left(\frac{L_S}{M_{SR}} \frac{R_R}{g} + j\omega_S \left(\frac{L_S L_R}{M_{SR}} - M_{SR} \right) \right) \text{ Exprimons } \underline{I}'_R \text{ en fonction de } \underline{I}_R :$$

$$V_E = -I'_R \frac{L_S}{M_{SR}} \left(\frac{L_S}{M_{SR}} \frac{R_R}{g} + j\omega_S \left(\frac{L_S L_R}{M_{SR}} - M_{SR} \right) \right) = -I'_R \left[\left(\frac{L_S}{M_{SR}} \right)^2 \left(\frac{R_R}{g} \right) + j\omega_S \frac{L_S}{M_{SR}} \left(\frac{L_S L_R}{M_{SR}} - M_{SR} \right) \right]$$

$$V_E = -I'_R \left[\left(\frac{L_S}{M_{SR}} \right)^2 \left(\frac{R_R}{g} \right) + j\omega_S \left(\frac{L_S}{M_{SR}} \right)^2 \left(L_R - \frac{M_{SR}^2}{L_S} \right) \right] = -I'_R \left[\left(\frac{L_S}{M_{SR}} \right)^2 \left(\frac{R_R}{g} \right) + j\omega_S \left(\frac{L_S}{M_{SR}} \right)^2 L_R \left(1 - \frac{M_{SR}^2}{L_S L_R} \right) \right]$$

Compte tenu de la **Figure 10**, on peut aussi écrire : $V_E = -I'_R \left[\left(\frac{R'_R}{g} \right) + j\omega_S L'_R \right]$

ce qui permet de trouver : $R'_R = \left(\frac{L_S}{M_{SR}}\right)^2 .R_R$ et $L'_R = \left(\frac{L_S}{M_{SR}}\right)^2 \left(1 - \frac{M_{SR}^2}{L_S L_R}\right) L_R = \mathbf{s} \left(\frac{L_S}{M_{SR}}\right)^2 L_R$ en

posant : $\mathbf{s} = 1 - \frac{M_{SR}^2}{L_S L_R}$

où \mathbf{s} est appelé **coefficient de dispersion de BLONDEL**

Interprétation physique du modèle :

Interprétation de \mathbf{s} :

Le terme $\frac{M_{SR}}{L_S}$ représente le rapport de transformation de la machine dans le sens **stator rotor** :

$m_{S \rightarrow R}$. De même, $\frac{L_R}{M_{SR}}$ représente le rapport de transformation de la machine dans le sens **rotor stator** :

$m_{R \rightarrow S}$.

Si la machine n'a pas de fuites de flux, ces 2 rapports de transformation doivent être inverses (il suffit de se souvenir que dans un transformateur classique, cela représente le rapport des nombres de spires des bobinages).

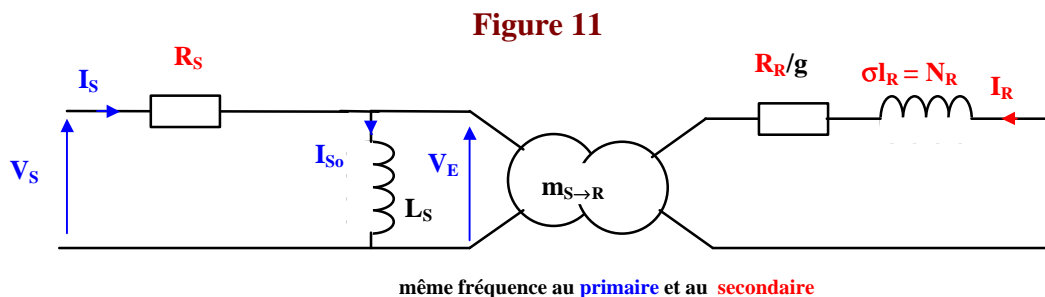
Dans ce cas : $\frac{M_{SR}}{L_S} = \frac{L_R}{M_{SR}}$, ce qui conduit à $\mathbf{s} = 0$.

Le **coefficient de dispersion de Blondel** permet d'estimer les fuites de flux de la machine. Typiquement, on a : $\mathbf{s} \leq 10\%$.

Interprétation de $R'_R = \left(\frac{L_S}{M_{SR}}\right)^2 .R_R$ et $L'_R = \left(\frac{L_S}{M_{SR}}\right)^2 \mathbf{s} L_R$

$$R'_R = \frac{R_R}{(m_{S \rightarrow R})^2} \text{ et } L'_R = \frac{\mathbf{s} L_R}{(m_{S \rightarrow R})^2}$$

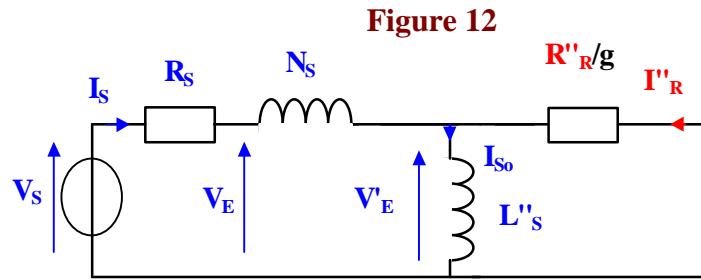
On peut donc dire que le modèle est équivalent à celui de la **Figure 11** :



Ca n'est autre que le modèle de la **Figure 5**, aux pertes fer près puisqu'elles n'ont pas été prises en compte et avec une convention opposée pour le courant I_R . Mais cela donne une signification claire aux différents éléments, alors que ceux introduits par l'analogie transformateur étaient issus d'une approximation.

3.8. Schéma équivalent en régime permanent : modèle à fuites totalisées au stator

En procédant comme précédemment, il est possible de donner un schéma où l'on ramène les fuites au niveau du stator. Le schéma est alors le suivant :



Comme dans le paragraphe précédent, $j\omega_s \underline{F}_S$ s'identifie à \underline{V}_E .

Pour exprimer N_S , on reprend les équations des flux (3.2) $\underline{F}_S = L_S \underline{I}_S + M_{SR} \underline{I}_R$ et (3.4) $\underline{F}_R = L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S$ en exprimant \underline{I}_R en fonction de \underline{I}_S .

$$I_R = \frac{1}{L_R} (\Phi_R - M_{SR} I_S) \text{ soit } \Phi_S = L_S I_S + \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_R - M_{SR} I_S) = \left(L_S - \frac{M_{SR}^2}{L_R} \right) I_S + \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_R$$

$$\Phi_S = L_S \left(1 - \frac{M_{SR}^2}{L_R L_S} \right) I_S + \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_R = s L_S I_S + \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_R$$

Le terme N_S peut alors être identifié à $s L_S$ et $V'_E = j\omega_s \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_R$

Pour qu'il y ait équivalence entre les schémas, notamment à vide ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$), on doit avoir

$$L''_S = (1 - s) L_S = \frac{M_{SR}^2}{L_R}$$

Il est alors possible d'en déduire la valeur du courant \underline{I}_{S0} :

$$I_{S0} = \frac{V'_E}{j\omega_s L''_S} = \frac{\frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_R}{\frac{M_{SR}^2}{L_R}} = \frac{\Phi_R}{M_{SR}}$$

Or (3.4) $\underline{F}_R = L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S$. D'où $I_S = \frac{\Phi_R}{M_{SR}} - \frac{L_R}{M_{SR}} I_R = I_{S0} - I''_R$ d'après la Figure 12.

On en déduit $I''_R = \frac{L_R}{M_{SR}} I_R$

De la Figure 12, on tire la loi des mailles : $V'_E = -\frac{R''_R}{g} I''_R$ ou $j\omega_s \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_R = -\frac{R''_R}{g} \cdot \frac{L_R}{M_{SR}} I_R$

De (3.5) $\mathbf{0} = \underline{R}_R \underline{I}_R + j\omega_s \mathbf{g} \cdot \underline{F}_R$, on tire : $j\omega_s \Phi_R = -\frac{R_R}{g} I_R$, soit en réécrivant la ligne du dessus :

$$-\frac{R_R}{g} \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right) I_R = -\frac{R''_R}{g} \cdot \frac{L_R}{M_{SR}} I_R, \text{ d'où :}$$

$$R''_R = \left(\frac{M_{SR}}{L_R} \right)^2 R_R$$

Soit finalement les 2 expressions : $R''_R = \left(\frac{M_{SR}}{L_R}\right)^2 R_R$ et $L''_S = \frac{M_{SR}^2}{L_R} = \left(\frac{M_{SR}}{L_R}\right)^2 L_R$

Interprétation physique du modèle :

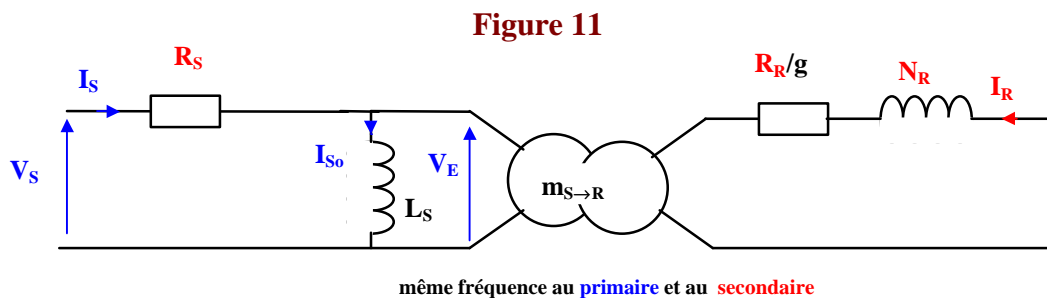
Le coefficient $\frac{M_{SR}}{L_R}$ représente $1/m_{R \rightarrow S}$.

L'intérêt du schéma de la **Figure 12** est de faire apparaître 2 éléments : L''_S et R''_R qui auront des courants en quadrature. Celui qui circule dans L''_S est générateur de flux et celui qui circule dans R''_R générateur de couple comme on le verra dans la suite.

Le fait qu'ils soient en quadrature est une première approche de la **commande vectorielle en régime permanent**. On y retrouve la quadrature entre le champ magnétique d'excitation et le courant induit de la machine à courant continu. *Il est toutefois important de noter qu'il n'y a à ce stade aucun moyen de régler de façon indépendante chacun de ces 2 courants, ce qui constitue réellement la commande vectorielle.*

B2.4. COUPLE ELECTROMAGNETIQUE EN REGIME PERMANENT (alimentation du moteur avec un réseau à fréquence fixe)

Pour exprimer le couple électromagnétique, on va utiliser le modèle établi à la **Figure 11**.



$m_{S \rightarrow R}$ sera noté plus simplement m .

Le couple se calcule à partir de la puissance électromagnétique par $P_E = T_E \Omega_S$

4.1. Expression du couple TE

La puissance électrique transmise au **rotor** de la machine est consommée dans les résistances $\frac{R_R}{g}$:

$$P_e = 3 \frac{R}{g} I_R^2 = T_E \Omega_S$$

Le schéma montre que :

$$I_R^2 = \frac{(m * V_E)^2}{(R_R / g)^2 + N_R \omega_S^2}$$

On obtient donc :

$$T_E = 3 \frac{(mV_E)^2}{\Omega_S} \cdot \frac{R_R / g}{(R_R / g)^2 + (N_R \omega_S)^2}$$

La tension V_E n'est pas directement accessible. On peut la remplacer par V_S si la chute de tension dans la résistance R_S est négligeable, ce qui n'est pas toujours le cas.

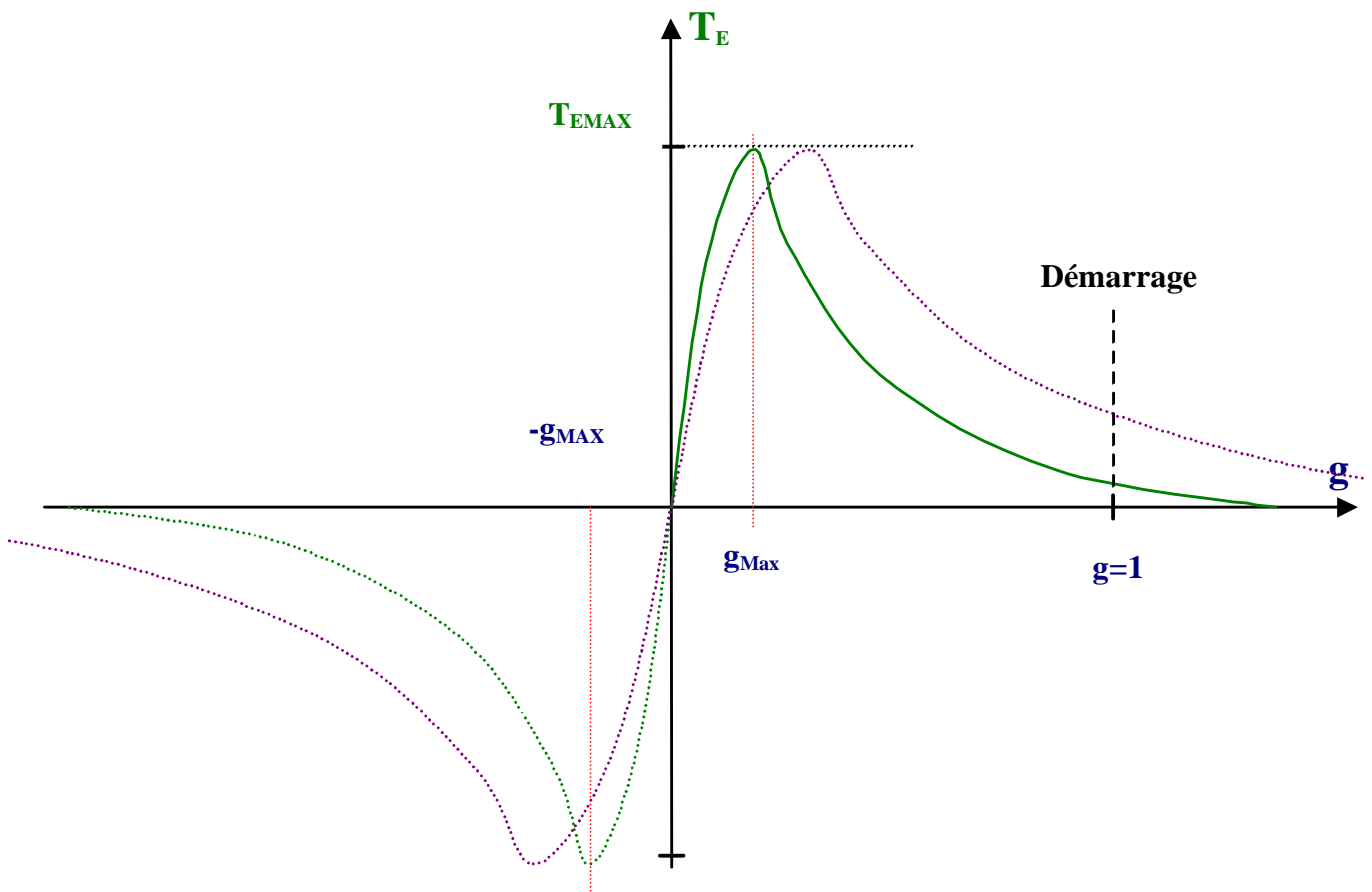
4.2. $T_E = f(g)$

La représentation de cette fonction est faite à $V_E = \text{constante}$. On peut constater que toutes choses égales par ailleurs, le couple est proportionnel au carré de la tension d'alimentation. Le point $g = 1$ correspond à un démarrage de moteur.

La partie $g = \frac{n_s - n}{n_s} > 0$ correspond à un fonctionnement moteur *hyposynchrone* et la partie

$g = \frac{n_s - n}{n_s} < 0$ correspond à un fonctionnement générateur *hypersynchrone*.

Figure 13



Il est facile d'établir que $T_{EMAX} = \frac{3(mV_E)^2}{2\Omega_S N_R \omega_S} = \frac{3pm^2V_E^2}{2N_R \omega_S^2}$ pour $g = g_{MAX} = \frac{R_R}{N_R \omega_S}$.

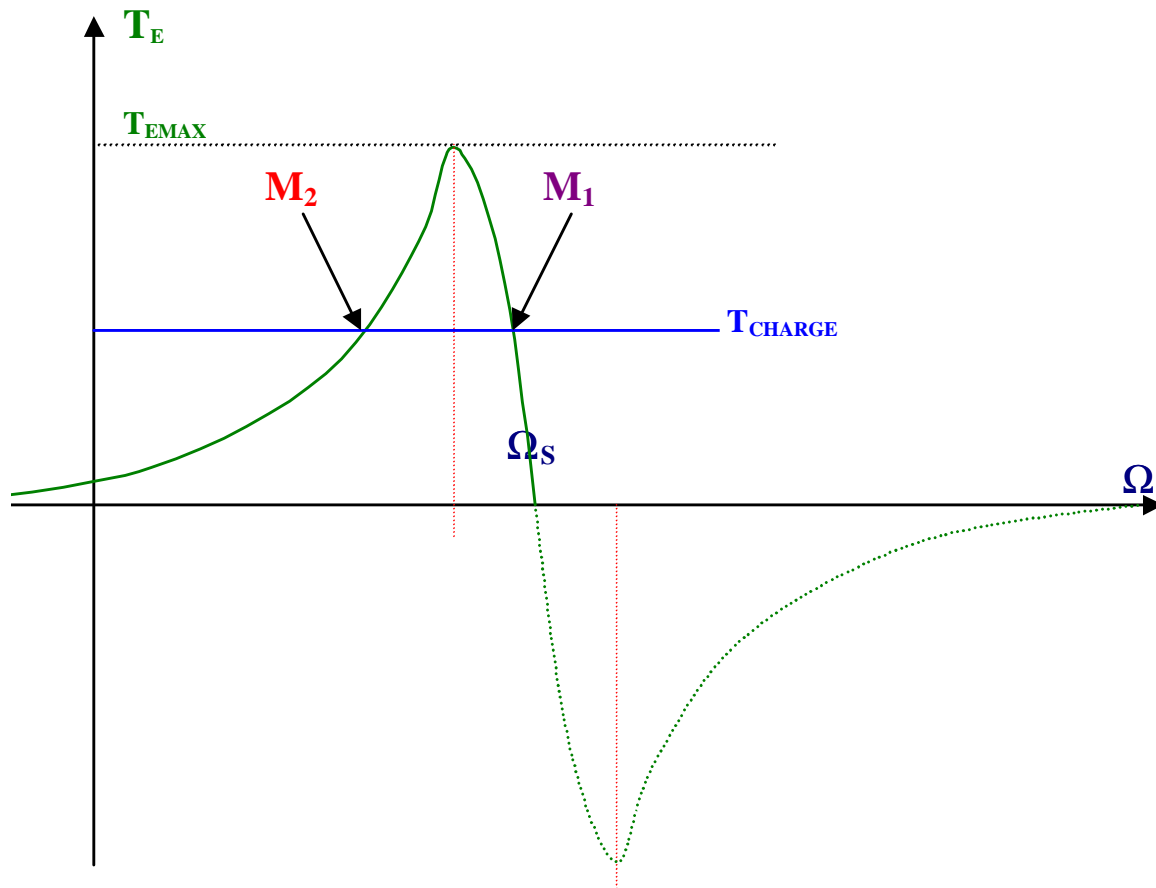
On constate que T_{EMAX} ne dépend pas de R_R mais que g_{MAX} est proportionnel à R_R . Ainsi la courbe

violette donne une représentation pour une résistance rotorique plus élevée. *Ceci n'a évidemment pas de sens pour une machine à cage*. Par contre, on peut choisir la forme globale de la courbe de couple en jouant sur la forme des encoches de la cage (*moteur simple cage, double cage, etc...*).

A noter que cette courbe n'a pas de sens au voisinage de $g = 1$ pour interpréter un démarrage de moteur asynchrone, car on a vu dans la partie A que l'on est loin d'être en régime permanent au démarrage !

4.3. $T_E = f(\Omega)$

Figure 14



Il s'agit de la même courbe que précédemment, mais on remplace la variable g par la variable $W = W_s(1-g)$.

Le couple électromagnétique s'annule pour $W = W_s$. Le fonctionnement **moteur** correspond à $W \leq W_s$ et le fonctionnement **générateur** à $W > W_s$.

Considérons le cas d'une charge demandant un **couple constant** (*par exemple levage avec un treuil*). La **caractéristique du moteur** coupe en 2 points la **caractéristique de la charge** : M_1 et M_2 . A partir de M_2 , une légère augmentation du couple résistant entraînera ponctuellement une légère diminution de vitesse de rotation. Il en résultera une chute du couple électromagnétique d'où une diminution de la vitesse car $T_{CHARGE} > T_E$ sans que l'équilibre puisse se rétablir. **Le moteur « décrochera »**.

Le seul point de fonctionnement stable sera donc le point M_1 .

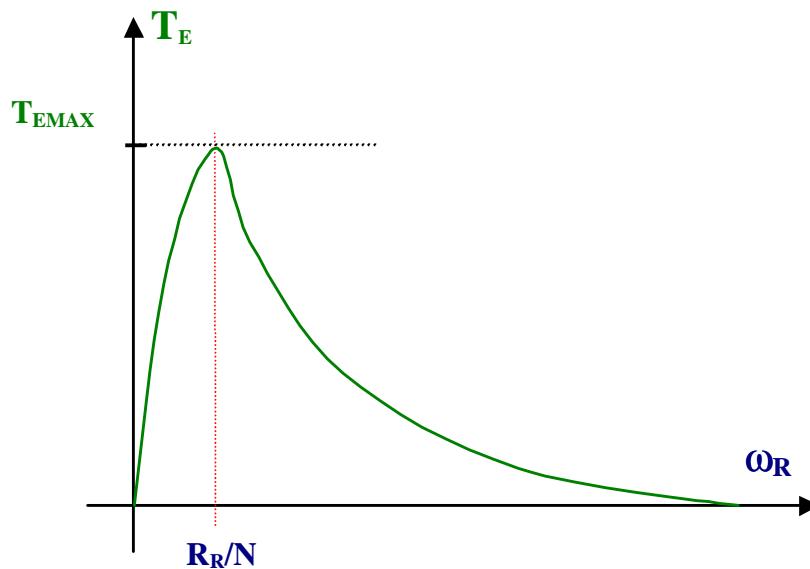
4.4. $T_E = f(\omega_R)$

Nous allons donner une autre expression du couple en utilisant la variable ω_R , pulsation des courants au niveau **rotorique**. Le glissement a été défini au paragraphe 1.3. pour un fonctionnement moteur par $g = \frac{n_s - n}{n_s}$. Dans ce cas g est positif, mais il devient négatif pour un fonctionnement

générateur. On écrira : $g = \pm \frac{\omega_R}{\omega_S}$, le signe + correspondant à un **fonctionnement moteur** et le signe - à un **fonctionnement générateur**. L'expression du couple devient :

$$T_E = \pm \frac{3pm^2V_E^2}{\omega_S} \cdot \frac{R_R \omega_S / \omega_R}{(R_R \omega_S / \omega_R)^2 + (N_R \omega_S)^2} = \pm \frac{3pm^2V_E^2}{\omega_S^2} \cdot \frac{R_R / \omega_R}{(R_R / \omega_R)^2 + (N_R)^2} \quad (4.1.)$$

Figure 15



La **Figure 15** a la même allure que celle de la **Figure 13**, mais la variable est maintenant ω_R . Le couple passe par une valeur maximale $T_{EMAX} = \frac{3pm^2V_E^2}{2N_R \omega_S^2}$ pour une valeur de $\omega_R = \frac{R_R}{N_R}$. On n'a pas représenté ici la partie correspondant au fonctionnement générateur car elle est symétrique par rapport à l'axe ω_R .

L'équation **(4.1.)** montre que le couple en régime permanent ne dépend que de la pulsation ω_R pour un moteur alimenté sur un réseau industriel à fréquence et tension fixées.

B2.5. SOLUTIONS CLASSIQUES POUR LA VARIATION DE VITESSE

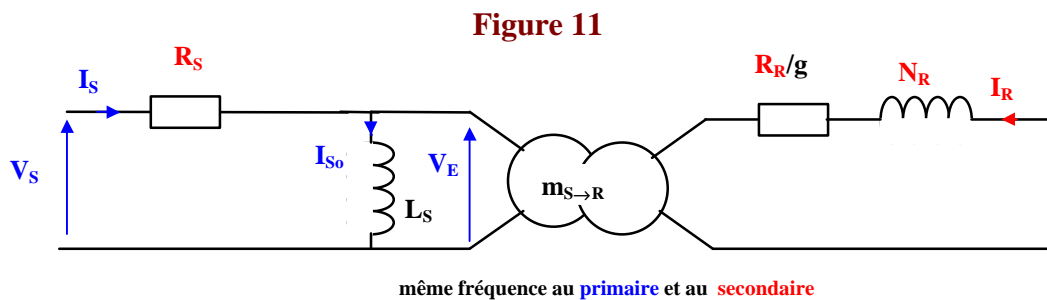
5.1. Démarrage des moteurs sur un réseau industriel à fréquence fixe

On ne peut pas parler dans ce cas de variation de vitesse puisqu'il s'agit simplement de passer de la vitesse *nulle* à la vitesse *de fonctionnement*. On souhaite simplement limiter l'appel de courant au démarrage sans trop limiter le couple. Les solutions classiques sont :

- démarrage étoile triangle
- insertion de résistances ou d'inductances en série avec le **stator**
- démarrage par autotransformateur
- utilisation de produits spécifiques (Altistart de Télémécanique par exemple)

Toutes les solutions précédentes sont utilisables sur des moteurs à cage. Dans le cas où le moteur est à **rotor** bobiné, il est possible de faire varier la vitesse en utilisant un rhéostat **rotorique** (classique ou électronique).

5.2. Variateurs scalaires à $U/f = \text{constante}$



On a montré dans ce cas (**B2.4. 4.4.**) que le couple électromagnétique en régime permanent est donné par :

$$T_E = \pm \frac{3pm^2V_E^2}{\omega_S^2} \cdot \frac{R_R / \omega_R}{(R_R / \omega_R)^2 + (N_R)^2}$$

La valeur maximale du couple est donnée par $T_{EMAX} = \frac{3pm^2V_E^2}{2N_R\omega_S^2}$ pour $\omega_R = \frac{R_R}{N_R}$.

Alimentons la machine à partir d'un onduleur pour lequel on a accès aux réglages de la fréquence de travail et à la valeur efficace de la tension V_E .

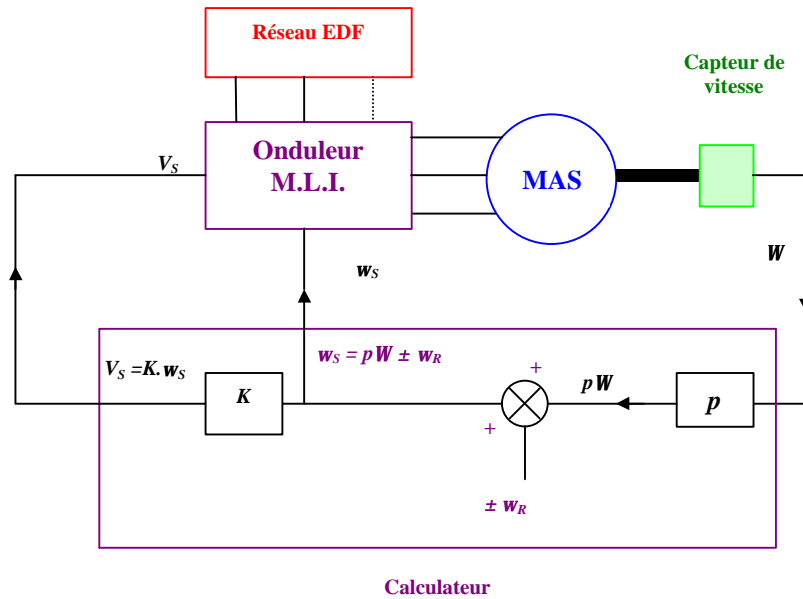
$$T_{EMAX} = \frac{3pm^2V_E^2}{2N_R\omega_S^2} \text{ ou } T_{EMAX} = \frac{3pm^2}{2N_R} \left(\frac{V_E}{\omega_S} \right)^2$$

Si l'on peut travailler avec un rapport $\frac{V_E}{\omega_S} = \text{constante}$, cette valeur maximale du couple sera constante quelque soit la fréquence de travail.

De façon plus fine, si l'on souhaite maîtriser le couple en régime permanent de la machine, il faudra imposer $\frac{V_E}{\omega_S} = \text{constante}$ mais aussi la pulsation **rotorique** ω_R .

Le schéma ci-dessous propose une structure de principe permettant le contrôle du couple en régime établi.

Figure 16



La source d'énergie est le réseau EDF mono ou triphasé.

Le moteur est piloté par un onduleur de tension à modulation de largeur d'impulsion.

Un capteur de vitesse permet d'accéder à la grandeur W . Un calculateur permet d'élaborer la consigne de pulsation de l'onduleur : $w_s = p\Omega \pm w_R$. w_R sera choisie en fonction du niveau de couple souhaité et l'on prendra un signe $+$ dans le cas d'un **fonctionnement moteur** et le signe $-$ pour un **fonctionnement en freinage**. w_s permet de fournir une consigne de tension V_s pour l'onduleur : $V_s = K.w_s$.

Ce type de commande correspond à un **fonctionnement autopiloté** au sens où la fréquence qui est générée par l'onduleur est fonction de la vitesse réelle de la machine. Il existe bien-sûr des commandes plus simples qui ne nécessitent pas de capteur de vitesse.

Critique de la conception :

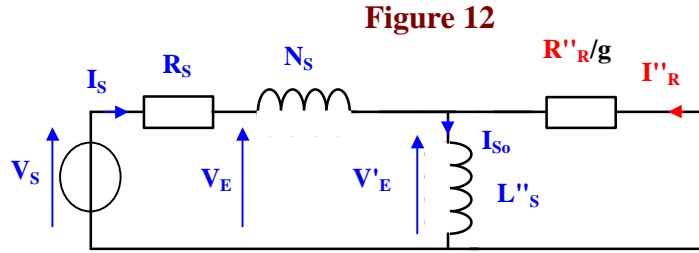
On ne peut élaborer que V_s , alors que c'est V_E qui serait nécessaire ! Mais V_E n'est pas une grandeur accessible. Ces 2 grandeurs diffèrent toutefois assez peu dans le cas où l'on peut négliger la chute de tension dans la résistance R_s . Ceci est le cas à vitesse assez proche de la vitesse nominale mais ça n'est plus vrai aux faibles vitesses car on peut montrer que $R_s I_s$ ne dépend pas de la vitesse à couple constant.

Voilà pourquoi, le couple en régime permanent établi ne sera pas bien maîtrisé à basse vitesse avec ce type de variateur.

Les constructeurs proposent des profils de lois de commande V_s/w_s non constants pour s'adapter aux différents types de charges rencontrées dans l'industrie (**pompes, ventilateurs, etc...**), de la compensation « RI » pour essayer de tenir compte de la chute de tension **statorique**, de la compensation de glissement dans le cas où il n'y a pas de capteur de vitesse.

5.3. Variateurs à contrôle de courant

Reprenons le schéma proposé à la **Figure 12**.



On va exprimer ici le couple en régime établi à partir du modèle à fuites totalisées au **stator**.

La puissance électromagnétique est donnée par :

$$P_e = 3 \frac{R''_R}{g} I''_R{}^2 = T_E \Omega_S$$

La relation du diviseur de courant permet d'écrire :

$$I''_R{}^2 = I_S{}^2 \frac{\left(\frac{1}{R''_R/g}\right)^2}{\left(\frac{1}{R''_R/g}\right)^2 + \left(\frac{1}{L''_S w_S}\right)^2} = I_S{}^2 \frac{(L''_S w_S)^2}{(L''_S w_S)^2 + \left(\frac{R''_R}{g}\right)^2}$$

$$I''_R{}^2 = I_S{}^2 \frac{(L''_S)^2}{(L''_S)^2 + \left(\frac{R''_R}{w_R}\right)^2} \text{ car } g = \pm \frac{w_R}{w_S}$$

Ce qui permet de donner une expression autre de T_E :

$$T_E = \frac{3}{\Omega_S} \cdot \frac{R''_R}{g} \cdot I''_R{}^2 = \pm 3p \cdot \frac{R''_R}{w_R} \cdot I_S{}^2 \frac{(L''_S)^2}{(L''_S)^2 + \left(\frac{R''_R}{w_R}\right)^2} = \pm 3p \cdot (L''_S)^2 \cdot I_S{}^2 \frac{\frac{R''_R}{w_R}}{(L''_S)^2 + \left(\frac{R''_R}{w_R}\right)^2}$$

Cette expression montre que le couple sera imposé par une valeur de w_R et une valeur de I_S . Il est donc possible d'imaginer une structure identique à celle donnée à la **Figure 16**. La seule différence réside dans le fait que l'onduleur de tension sera remplacé par un commutateur de courant dont on contrôlera le courant.

Cette solution a notamment été retenue par la SNCF (Z20500). La constante de temps d'un train au démarrage étant longue, il est facile de comprendre que l'on se rapprochera d'un fonctionnement en régime établi à tout instant. Il en irait évidemment autrement de la motorisation d'une machine outil avec des temps de réaction très courts !

B3. MODELISATION EN REGIME QUELCONQUE

Bibliographie :

1. Machines électriques : T1 par J CHATELAIN (Collection DUNOD)
2. Introduction à l'électrotechnique approfondie par J LESSENNE, F NOTELET, G SEGUIER (Collection Technique et Documentation)
3. Modélisation et commande de la machine asynchrone par JP CARON et JP HAUTIER (Editions TECHNIP)

La compréhension de cette partie nécessite un minimum de connaissances sur le calcul matriciel. On trouvera en annexe un résumé des propriétés les plus importantes (on pourra consulter un ouvrage de maths appliquées : AZOULAY/AVIGNANT T2 BTS et IUT Collection Edisciences).

En électrotechnique, il n'est pas rare d'être confronté à des **changements de base**. Ainsi, dans l'étude des réseaux déséquilibrés, on utilise un changement de base permettant d'exprimer tout *réseau* (v_1, v_2, v_3) à partir de 3 grandeurs appelées :

- **composante directe** : v_d
- **composante inverse** : v_i
- **composante homopolaire** : v_o

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_i \\ v_o \end{bmatrix}$$

avec $a = \exp(j.2\pi/3)$: **opérateur rotation** de $2\pi/3$

La matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$ est appelée **matrice de changement de base**.

On a déjà rencontré des matrices dans la 1ère partie :

- **B2.3.3.2.** matrice « **résistance** »
- **B2.3.3.3.** matrice « **inductance** » au **stator** et au **rotor** et matrice « **inductance mutuelle** »

La matrice « **résistance** » est simple : elle est *diagonale* car elle n'a de composantes non nulles que sur sa première diagonale. Par contre, les matrices « **inductance** » et « **inductance mutuelle** » sont plus complexes.

Le but d'un changement de base est de rendre leur écriture plus simple dans la nouvelle base.

Cela consiste en pratique à les rendre *diagonales*.

B3.1. DIAGONALISATION D'UNE MATRICE INDUCTANCE

Considérons une matrice inductance **statorique** ou **rotorique** en omettant l'indice.

$$[L] = \begin{bmatrix} l & m & m \\ m & l & m \\ m & m & l \end{bmatrix}$$

Cette matrice est symétrique par rapport à sa première diagonale. Elle est alors diagonalisable. On va donc essayer de la diagonaliser et de déterminer le changement de base permettant de le faire.

La démarche consiste à trouver les valeurs propres de cette matrice :

1. On calcule pour cela le polynôme caractéristique de cette matrice soit : $\det([L] - I[I]) = 0$ où la notation « det » désigne le déterminant, $[I]$ représente la matrice

unité 3 sur 3, c'est à dire : $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et I une valeur propre.

2. On cherche ensuite les racines de ce polynôme qui sont les valeurs propres.
3. La matrice diagonale est alors obtenue en rangeant les différentes valeurs propres sur la 1^{ère} diagonale et la matrice de changement de base est donnée par un ensemble de 3 vecteurs propres rangés dans le même ordre que les valeurs propres.

$$\det([L] - I[I]) = \begin{vmatrix} l-I & m & m \\ m & l-I & m \\ m & m & l-I \end{vmatrix} = (l-I)[(l-I)^2 - m^2] - m[m(l-I) - m^2] + m[m^2 - m(l-I)]$$

où l'on a *développé* le déterminant suivant la première ligne de la matrice.

$$\det([L] - I[I]) = (l-I)[l-I-m][l-I+m] - 2m^2[l-I-m] = [l-I-m][(l-I)(l-I+m) - 2m^2]$$

$\det([L] - I[I]) = 0$ si l'un ou l'autre des 2 facteurs s'annule soit de façon évidente $I_1 = l-m$ pour le premier, $I_2 = l-m$ et $I_3 = l+2m$ qui sont les racines de l'équation du 2^{ème} degré en m du 2^{ème} facteur.

La **matrice diagonale** peut donc s'écrire :

$$[L_{diag}] = \begin{bmatrix} l-m & 0 & 0 \\ 0 & l-m & 0 \\ 0 & 0 & l+2m \end{bmatrix}$$

Reste maintenant à déterminer la matrice de changement de base qui pourra s'écrire :

$$[P] = [(V_{11}) \quad (V_{12}) \quad (V_{13})]$$

où les 3 vecteurs (V_I) représentent un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.

Pour I_1 on aura :

$$\begin{bmatrix} l & m & m \\ m & l & m \\ m & m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (l-m) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont les coordonnées du vecteur propre.}$$

puisque un vecteur propre vérifie la propriété : $[L](V_I) = I(V_I)$

En effectuant le produit de matrices, on obtient pour la première ligne :

$$\begin{aligned} la + mb + mc &= la - ma \\ \text{soit } a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

On vérifiera que pour les 2 autres lignes on obtient le même résultat.

Par conséquent *tout vecteur dont les composantes forment un système triphasé équilibré* est un vecteur propre. On peut donc choisir avec q quelconque :

$$(V_{I1}) = \begin{bmatrix} \cos q \\ \cos q - 2\Pi/3 \\ \cos q - 4\Pi/3 \end{bmatrix}$$

La 2^{ème} valeur propre étant identique à la première, on doit choisir un vecteur propre qui soit indépendant. Un choix possible est :

$$(V_{I2}) = \begin{bmatrix} -\sin q \\ -\sin q - 2\Pi/3 \\ -\sin q - 4\Pi/3 \end{bmatrix}$$

On montrera facilement que pour λ_3 , la solution est un vecteur dont les 3 composantes sont égales :

$$(V_{I3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une matrice de changement de base possible (elle n'est pas unique) est :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 1 \\ \cos q - 2\Pi/3 & -\sin q - 2\Pi/3 & 1 \\ \cos q - 4\Pi/3 & -\sin q - 4\Pi/3 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intérêt de ce changement de base est qu'il rend la matrice inductance de départ (seulement symétrique) **diagonale** :

$$[L_{diag}] = \begin{bmatrix} l-m & 0 & 0 \\ 0 & l-m & 0 \\ 0 & 0 & l+2m \end{bmatrix}$$

On se propose de montrer dans la suite que moyennant quelques aménagements pour la matrice de passage, toutes les matrices et notamment la matrice « inductance mutuelle » peuvent être diagonalisées.

B3.2. CHANGEMENT DE BASE DE PARK

La **transformation de PARK** est ancienne (1929), si elle redevient à l'ordre du jour, c'est tout simplement parce que les progrès de la technologie des composants permettent maintenant de la réaliser en temps réel.

Soit (V_S) le vecteur tension appliqué aux 3 phases **statoriques** de la machine :

$$(V_S) = \begin{bmatrix} v_{S1} \\ v_{S2} \\ v_{S3} \end{bmatrix}$$

Ce vecteur constitué des 3 tensions est à priori **quelconque** *car on ne se limite pas dans cette partie à un régime sinusoïdal.*

La **transformée de PARK** correspond tout simplement au changement de base précédemment exposé qui permet de diagonaliser une matrice « inductance ».

La matrice de changement de base est $[P(q_S)]$ définie par :

$$[P(q_S)] = \begin{bmatrix} \cos q_S & -\sin q_S & 1 \\ \cos(q_S - 2\Pi/3) & -\sin(q_S - 2\Pi/3) & 1 \\ \cos(q_S - 4\Pi/3) & -\sin(q_S - 4\Pi/3) & 1 \end{bmatrix}$$

l'indice « s » étant ici rajouté pour signifier que l'on est au **stator**.

Le paramètre q_S est au choix de l'utilisateur. Il doit donc être choisi judicieusement et peut dépendre du temps.

On écrira alors :

$$\begin{bmatrix} v_{S1} \\ v_{S2} \\ v_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_S & -\sin q_S & 1 \\ \cos(q_S - 2\Pi/3) & -\sin(q_S - 2\Pi/3) & 1 \\ \cos(q_S - 4\Pi/3) & -\sin(q_S - 4\Pi/3) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Sd} \\ v_{Sq} \\ v_{So} \end{bmatrix}$$

ce qui représente le changement de coordonnées :

- v_{Sd} est appelée **composante directe** de PARK
- v_{Sq} est appelée **composante en quadrature** (ou encore **transversale**)
- v_{So} s'apparente à la **composante homopolaire**.

On notera que le changement de base s'écrit : $(V_{AB}) = [P(q_S)](V_{NB})$ qui correspond à la notation habituelle des mathématiciens, avec **AB** signifiant « **Ancienne Base** » ou base de départ et **NB** « **Nouvelle Base** » ou **base de PARK**.

Le **changement de base** pour une matrice $[M]$ donne alors (voir annexe) :

$[M]_{NB} = [P(q_S)]^{-1} [M]_{AB} [P(q_S)]$ où la notation $[P(q_S)]^{-1}$ désigne la matrice inverse de $[P(q_S)]$ (voir annexe).

Le vecteur $\begin{bmatrix} v_{Sd} \\ v_{Sq} \\ v_{So} \end{bmatrix}$ représente les coordonnées de PARK du vecteur initial $\begin{bmatrix} v_{S1} \\ v_{S2} \\ v_{S3} \end{bmatrix}$ lors du changement de base.

2.1. Transformation de PARK orthonormée

Le carré de la norme du vecteur est obtenu en faisant le produit scalaire du vecteur par lui même (voir annexe).

Il est alors facile de remarquer que les 3 vecteurs qui constituent la matrice de changement de base $[P(q_s)]$ ne sont pas normés. Par contre, on constate qu'ils sont orthogonaux 2 à 2 (produit scalaire nul).

On préfère définir un changement de base qui soit orthonormé en définissant la matrice de passage $[P_I(q_s)]$:

$$[P_I(q_s)] = \begin{bmatrix} \frac{\cos q_s}{\sqrt{3/2}} & \frac{-\sin q_s}{\sqrt{3/2}} & 1/\sqrt{3} \\ \frac{\cos(q_s - 2\pi/3)}{\sqrt{3/2}} & \frac{-\sin(q_s - 2\pi/3)}{\sqrt{3/2}} & 1/\sqrt{3} \\ \frac{\cos(q_s - 4\pi/3)}{\sqrt{3/2}} & \frac{-\sin(q_s - 4\pi/3)}{\sqrt{3/2}} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$[P_I(q_s)] = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \cos q_s & -\sin q_s & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(q_s - 2\pi/3) & -\sin(q_s - 2\pi/3) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(q_s - 4\pi/3) & -\sin(q_s - 4\pi/3) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La matrice de changement de base $[P_I(q_s)]$ étant orthonormée, le calcul de sa matrice inverse est très simple (voir annexe) :

$$[P_I(q_s)]^{-1} = \text{transposée } [P_I(q_s)] = [P_I(q_s)]^t$$

$$\text{On aura alors } [V_{NB}] = [P_I(q_s)]^{-1} \cdot [V_{AB}] = [P_I(q_s)]^t \cdot [V_{AB}]$$

2.2. Transformation de PARK en régime sinusoïdal établi

Nous allons appliquer la transformation de PARK au cas très particulier d'un régime permanent sinusoïdal de tension :

$$\begin{bmatrix} v_{S1} \\ v_{S2} \\ v_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos(\omega_s t + \mathbf{a}) \\ V \cos(\omega_s t - 2\pi/3 + \mathbf{a}) \\ V \cos(\omega_s t - 4\pi/3 + \mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

en prenant $q_s = \omega_s t$

$$\begin{bmatrix} v_{Sd} \\ v_{Sq} \\ v_{So} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_S & \cos(\mathbf{q}_S - 2\Pi/3) & \cos(\mathbf{q}_S - 4\Pi/3) \\ -\sin \mathbf{q}_S & -\sin(\mathbf{q}_S - 2\Pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_S - 4\Pi/3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos(\mathbf{w}_S t + \mathbf{a}) \\ V \cos(\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3 + \mathbf{a}) \\ V \cos(\mathbf{w}_S t - 4\Pi/3 + \mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

d'où l'on peut tirer pour la première ligne de la multiplication de matrice :

$$v_{Sd} = \sqrt{\frac{2}{3}} V [\cos(\mathbf{w}_S t) \cdot \cos(\mathbf{w}_S t + \mathbf{a}) + \cos(\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3) \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3 + \mathbf{a}) + \cos(\mathbf{w}_S t - 4\Pi/3) \cdot \cos(\mathbf{w}_S t - 4\Pi/3 + \mathbf{a})]$$

$$v_{Sd} = \sqrt{\frac{2}{3}} V \left[\frac{3}{2} \cos \mathbf{a} \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} V \cos \mathbf{a}$$

en utilisant la relation $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ et en remarquant que $\cos(2\mathbf{w}_S t - 8\Pi/3 + \mathbf{a}) = \cos(2\mathbf{w}_S t - 2\Pi/3 + \mathbf{a})$ et qu'alors les 3 termes en $\cos(2\mathbf{w}_S t \dots)$ se détruisent puisqu'il s'agit d'un système triphasé équilibré.

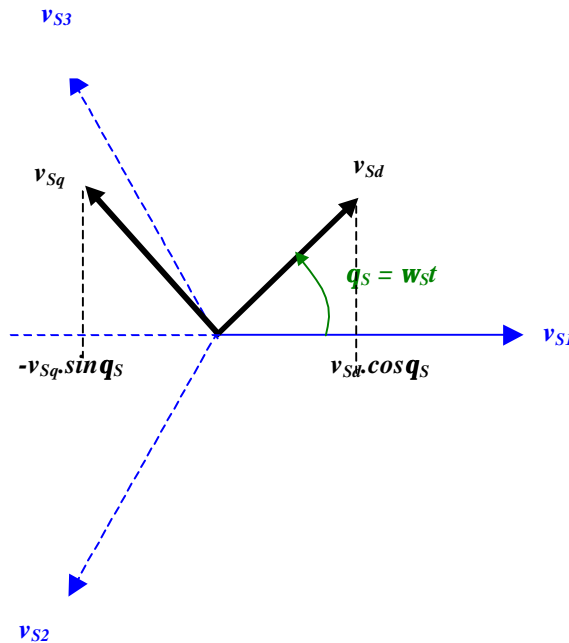
De la même façon, on trouvera : $v_{Sq} = -\sqrt{\frac{3}{2}} V \sin \mathbf{a}$ et $v_{So} = 0$

Conclusion :

Les composantes de PARK sont des constantes en régime sinusoïdal forcé lorsque l'on prend pour \mathbf{q}_S l'angle de synchronisme $\mathbf{w}_S t$.

On peut d'ailleurs se servir de cette remarque pour mémoriser les coordonnées de la matrice de PARK :

Figure 17



En projetant les vecteurs V_{Sd} et V_{Sq} sur la direction de V_{Sl} comme indiqué ci-dessus, on retrouve les 2 premiers coefficients de la matrice de PARK, le terme en V_{So} ne figure bien-sûr pas puisque V_{So} est nul. Les coefficients numériques résultent eux de l'opération de normalisation.

2.3. Conservation de la puissance lors du changement de base

Appliquons la **transformation de PARK** au système de tensions et courants **statoriques** :

Par définition la puissance électrique instantanée s'écrit : $p = (V_S)^T \cdot (I_S) = v_{S1} \cdot i_{S1} + v_{S2} \cdot i_{S2} + v_{S3} \cdot i_{S3}$

$(V_S) = [P_1(q_S)] \cdot (V_{SP})$ et $(I_S) = [P_1(q_S)] \cdot (I_{SP})$ où l'indice « p » indique « **dans la base de PARK** »

$(V_S)^T = (V_{SP})^T \cdot [P_1(q_S)]^T = (V_{SP})^T \cdot [P_1(q_S)]^{-1}$ (voir [annexe](#))

$p = (V_{SP})^T \cdot [P_1(q_S)]^{-1} \cdot [P_1(q_S)] \cdot (I_{SP}) = (V_{SP})^T \cdot (I_{SP})$

Le dernier terme de l'égalité représente la puissance électrique instantanée « **dans la base de PARK** ».

Il y a conservation de la puissance lors du changement de base orthonormé de PARK.

B3.3. MISE EN EQUATION MATRICIELLE DE LA MACHINE

3.1. Loi des mailles

En reprenant les résultats du paragraphe **B2.3. 3.2.** (loi des mailles), il vient avec des notations évidentes :

$$(V_S) = [R_S](I_S) + \frac{d}{dt}(\Phi_S) \text{ et } 0 = [R_R](I_R) + \frac{d}{dt}(\Phi_R)$$

$$\text{avec } [R_S] = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \text{ et } [R_R] = \begin{bmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{bmatrix}$$

On constate que ce sont des matrices diagonales

3.2. Equations des flux

En reprenant les résultats du paragraphe **B2.3. 3.3.** (équations des flux), il vient avec des notations évidentes :

$$(\Phi_S) = [L_S](I_S) + [M_{SR}](I_R) \text{ et } (\Phi_R) = [L_R](I_R) + [M_{SR}]^T \cdot (I_S)$$

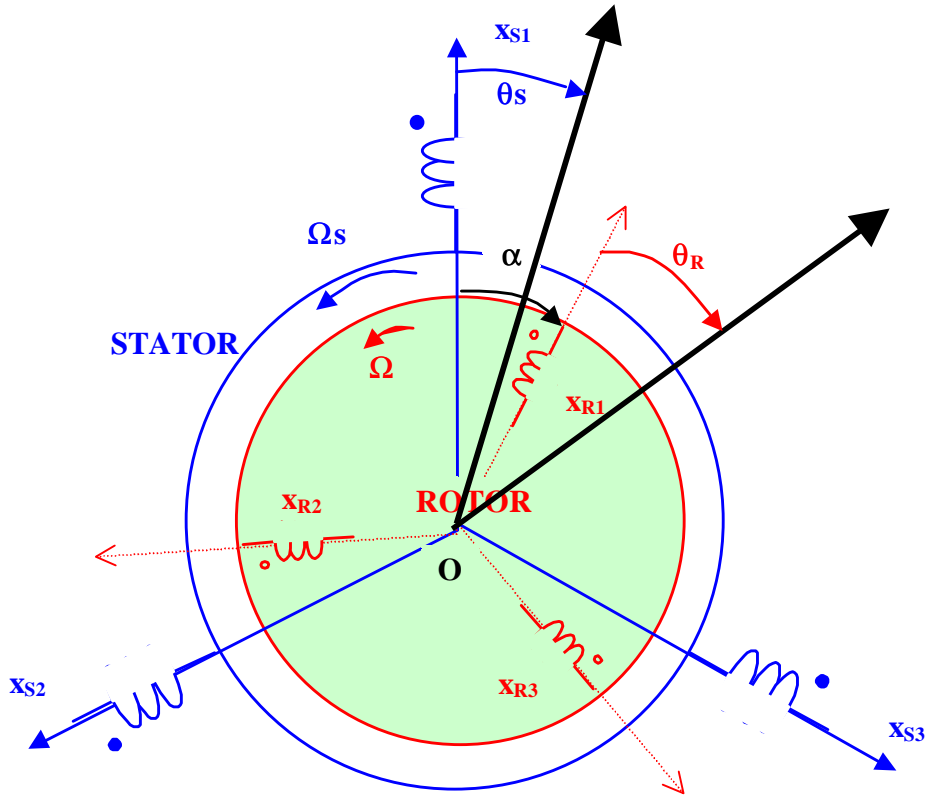
$$[L_S] = \begin{bmatrix} l_S & m_S & m_S \\ m_S & l_S & m_S \\ m_S & m_S & l_S \end{bmatrix} \text{ et } [M_{SR}] = m_{SR} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} & \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) \\ \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & \cos \mathbf{a} & \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) \\ \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & \cos \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

La matrice $[L_S]$ est symétrique et l'on a une notation analogue pour $[L_R]$. La matrice $[M_{SR}]^T$ est la [transposée](#) de $[M_{SR}]$.

B3.4. UTILISATION DE LA TRANSFORMEE DE PARK

Pour chaque vecteur défini précédemment (*tension, courant, flux*), on va faire un changement de repère de PARK aussi bien au stator qu'au rotor. q_s désignera l'angle pour le stator et q_R celui pour le rotor.

Figure 18



4.1. Loi des mailles

$$(V_s) = [R_s](I_s) + \frac{d}{dt}(\Phi_s)$$

A l'aide de la formule de [changement de base](#) il vient :

$$[P_1(q_s)](V_{sp}) = [R_s][P_1(q_s)](I_{sp}) + \frac{d}{dt}([P_1(q_s)](\Phi_{sp}))$$

En multipliant à gauche par $[P_1(q_s)]^{-1}$:

$$(V_{sp}) = [R_s](I_{sp}) + [P_1(q_s)]^{-1} \frac{d}{dt}([P_1(q_s)](\Phi_{sp})) = [R_s](I_{sp}) + \frac{d}{dt}(\Phi_{sp}) + [P_1(q_s)]^{-1} \cdot \frac{d}{dt}([P_1(q_s)])(\Phi_{sp})$$

C'est le dernier terme de la somme qui pose problème. On a :

$$\frac{d}{dt}[P_1(q_s)] \begin{pmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \\ \Phi_{so} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dq_s}{dt} \begin{bmatrix} -\sin q_s & -\cos q_s & 0 \\ -\sin(q_s - 2\pi/3) & -\cos(q_s - 2\pi/3) & 0 \\ -\sin(q_s - 4\pi/3) & -\cos(q_s - 4\pi/3) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \\ \Phi_{so} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{w}_s \begin{bmatrix} -\sin q_s \cdot \Phi_{sd} - \cos q_s \cdot \Phi_{sq} \\ -\sin(q_s - 2\pi/3) \cdot \Phi_{sd} - \cos(q_s - 2\pi/3) \cdot \Phi_{sq} \\ -\sin(q_s - 4\pi/3) \cdot \Phi_{sd} - \cos(q_s - 4\pi/3) \cdot \Phi_{sq} \end{bmatrix}$$

en posant $\frac{d\mathbf{q}_s}{dt} = \mathbf{w}_s$, ce qui ne signifie pas que c'est une constante !

$$[P_1(\mathbf{q}_s)]^{-1} \frac{d}{dt} [P_1(\mathbf{q}_s)] \begin{pmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \\ \Phi_{so} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \mathbf{w}_s \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_s & \cos(\mathbf{q}_s - 2\pi/3) & \cos(\mathbf{q}_s - 4\pi/3) \\ -\sin \mathbf{q}_s & -\sin(\mathbf{q}_s - 2\pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_s - 4\pi/3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \mathbf{q}_s \cdot \Phi_{sd} - \cos \mathbf{q}_s \cdot \Phi_{sq} \\ -\sin(\mathbf{q}_s - 2\pi/3) \cdot \Phi_{sd} - \cos(\mathbf{q}_s - 2\pi/3) \cdot \Phi_{sq} \\ -\sin(\mathbf{q}_s - 4\pi/3) \cdot \Phi_{sd} - \cos(\mathbf{q}_s - 4\pi/3) \cdot \Phi_{sq} \end{bmatrix}$$

Il est alors facile de montrer en effectuant la multiplication des matrices que :

$$[P_1(\mathbf{q}_s)]^{-1} \cdot \frac{d}{dt} [P_1(\mathbf{q}_s)] (\Phi_{SP}) = \mathbf{w}_s \cdot \begin{bmatrix} -\Phi_{sq} \\ +\Phi_{sd} \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où le résultat final :

$$(V_{SP}) = [R_S] (I_{SP}) + \frac{d}{dt} (\Phi_{SP}) + \mathbf{w}_s \cdot \begin{bmatrix} -\Phi_{sd} \\ +\Phi_{sq} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou encore en développant les **composantes de PARK** pour le **stator** :

$$V_{sd} = R_S \cdot I_{sd} + \frac{d}{dt} \Phi_{sd} - \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sq}$$

$$V_{sq} = R_S \cdot I_{sq} + \frac{d}{dt} \Phi_{sq} + \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sd}$$

$$V_{so} = R_S \cdot I_{so} + \frac{d}{dt} \Phi_{so}$$

On notera le couplage de V_{sd} avec F_{sq} et V_{sq} avec F_{sd}

On aura les mêmes équations au niveau du **rotor** en changeant partout l'indice « **s** » en « **r** » et en annulant les tensions puisque le **rotor** est en court-circuit.

4.2. Equations des flux

On procède de la même façon :

$$[P_1(\mathbf{q}_s)] (\Phi_{SP}) = [L_S] [P_1(\mathbf{q}_s)] (I_{SP}) + [M_{SR}] [P_1(\mathbf{q}_r)] (I_{RP})$$

On remarquera ici l'angle \mathbf{q}_s pour le stator et l'angle \mathbf{q}_r pour le rotor.

En multipliant à gauche par $[P_1(\mathbf{q}_s)]^{-1}$, il vient :

$$(\Phi_{SP}) = [P_1(\mathbf{q}_s)]^{-1} \cdot [L_S] [P_1(\mathbf{q}_s)] (I_{SP}) + [P_1(\mathbf{q}_s)]^{-1} \cdot [M_{SR}] [P_1(\mathbf{q}_r)] (I_{RP})$$

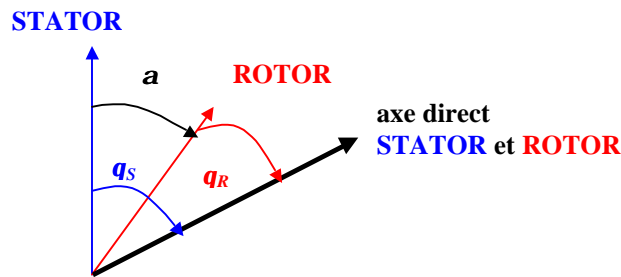
La matrice $[P_1(\mathbf{q}_S)]^{-1} \cdot [L_S] \cdot [P_1(\mathbf{q}_S)]$ ne pose pas de problème, compte tenu de la formule de [changement de base](#) pour les matrices : $[M]_{NB} = [P(\mathbf{q}_S)]^{-1} [M]_{AB} [P(\mathbf{q}_S)]$, il ne peut s'agir que de la matrice diagonale obtenue en **B3.1.** soit :

$$\begin{bmatrix} l_S - m_S & 0 & 0 \\ 0 & l_S - m_S & 0 \\ 0 & 0 & l_S + 2m_S \end{bmatrix}$$

$[P_1(\mathbf{q}_S)]^{-1} \cdot [M_{SR}] \cdot [P_1(\mathbf{q}_R)]$ est moins simple à obtenir à cause des 2 angles \mathbf{q}_S pour le stator et l'angle \mathbf{q}_R pour le rotor qui interviennent.

En faisant coïncider les axes directs rotor et stator, le calcul se simplifie

Figure 19



On a alors : $\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_R + \mathbf{a}$

$$[M_{SR}] [P_1(\mathbf{q}_R)] = m_{SR} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} & \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) \\ \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & \cos \mathbf{a} & \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) \\ \cos(\mathbf{a} - 4\Pi/3) & \cos(\mathbf{a} - 2\Pi/3) & \cos \mathbf{a} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_R & -\sin \mathbf{q}_R & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\mathbf{q}_R - 2\Pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_R - 2\Pi/3) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\mathbf{q}_R - 4\Pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_R - 4\Pi/3) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$[M_{SR}] [P_1(\mathbf{q}_R)] = \sqrt{\frac{3}{2}} m_{SR} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_S & -\sin \mathbf{q}_S & 0 \\ \cos(\mathbf{q}_S - 2\Pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_S - 2\Pi/3) & 0 \\ \cos(\mathbf{q}_S - 4\Pi/3) & -\sin(\mathbf{q}_S - 4\Pi/3) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P_1(\mathbf{q}_R)]^{-1} \cdot [M_{SR}] \cdot [P_1(\mathbf{q}_R)] = \frac{3}{2} m_{SR} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où l'on constate que l'on a ici aussi une matrice diagonale, ce qui justifie l'intérêt de la transformée de **PARK**.

En reprenant les notations de **B2.3.3.4.** $L_S = l_S - m_S$ et $M_{SR} = 3/2 m_{SR}$, et en développant chaque ligne, on obtient les composantes de PARK du flux **statorique** :

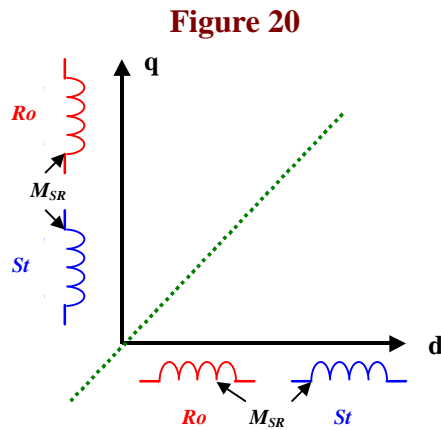
$$\Phi_{Sd} = L_S \cdot I_{Sd} + M_{SR} \cdot I_{Rd}$$

$$\Phi_{Sq} = L_S \cdot I_{Sq} + M_{SR} \cdot I_{Rq}$$

$$\Phi_{So} = (l_S - 2m_S) \cdot I_{So}$$

Il est remarquable de constater que ce sont les mêmes équations que celles qui ont été établies en régime sinusoïdal permanent, mais ici elles sont applicables quelque soit le régime.

On notera cette fois, *l'absence de couplage* entre les **axes d et q** de la transformation. C'est cela qui est le plus intéressant.



Au **rotor**, on aura les mêmes équations en substituant l'indice « s » à l'indice « r ».

4.3. Equations définitives de la machine

Introduisons les équations de flux dans les lois de mailles précédentes.

On ne s'intéresse qu'aux 2 premières équations, la dernière étant inutile car on s'arrange pour que les composantes homopolaires soient nulles.

$$V_{Sd} = R_S \cdot I_{Sd} + L_S \frac{d}{dt} I_{Sd} + M_{SR} \frac{d}{dt} I_{Rd} - \omega_S \cdot (L_S I_{Sq} + M_{SR} I_{Rq})$$

$$V_{Sq} = R_S \cdot I_{Sq} + L_S \frac{d}{dt} I_{Sq} + M_{SR} \frac{d}{dt} I_{Rq} + \omega_S \cdot (L_S I_{Sd} + M_{SR} I_{Rd})$$

On définit une transformation à un axe en posant pour les tensions par exemple : $\underline{V}_S = V_{Sd} + j V_{Sq}$. On obtient alors en faisant la somme de la première ligne et de la seconde multipliée par j :

$$\underline{V}_S = R_S \cdot \underline{I}_S + L_S \frac{d}{dt} \underline{I}_S + M_{SR} \frac{d}{dt} \underline{I}_R + j \omega_S \cdot (L_S \underline{I}_S + M_{SR} \underline{I}_R)$$

avec une équation semblable au rotor :

$$0 = R_R \cdot \underline{I}_R + L_R \frac{d}{dt} \underline{I}_R + M_{SR} \frac{d}{dt} \underline{I}_S + j(\omega_S - \omega) \cdot (L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S)$$

où l'on a posé $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$

4.4. Cas particulier du régime permanent

On a montré au **B3.2.2.2.** que si le régime est sinusoïdal permanent, les composantes de PARK sont alors constantes. Les dérivées $\left(\frac{d}{dt}\right)$ sont alors nulles.

Les équations se simplifient de la façon suivante :

$$\underline{V}_S = R_S \cdot \underline{I}_S + j\omega_S \cdot (L_S \underline{I}_S + M_{SR} \underline{I}_R)$$

$$0 = R_R \cdot \underline{I}_R + j(\omega_S - \omega) \cdot (L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S) = R_R \cdot \underline{I}_R + j \cdot g \omega_S \cdot (L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S)$$

$$0 = \frac{R_R}{g} \cdot \underline{I}_R + j \cdot \omega_S \cdot (L_R \underline{I}_R + M_{SR} \underline{I}_S)$$

*On retrouve formellement les mêmes équations que celles du paragraphe **B2.3.3.5.** mais cette fois pour les composantes de PARK. C'est mâtique !*

En régime permanent les schémas équivalents présentés en **B2.3.** sont donc valables pour les **composantes de PARK.**

B4. EXPRESSION DU COUPLE INSTANTANÉ EN REGIME QUELCONQUE

B4.1. PUISSANCE INSTANTANÉE

On a montré en **B3.2.2.3.** que la transformation de PARK conservait la puissance instantanée.

$$p_E = (\underline{V}_S)^T \cdot (\underline{I}_S) = v_{S1} \cdot i_{S1} + v_{S2} \cdot i_{S2} + v_{S3} \cdot i_{S3} = V_{Sd} \cdot I_{Sd} + V_{Sq} \cdot I_{Sq}$$

en tenant compte du fait que le terme homopolaire sera nul.

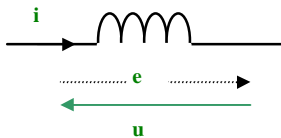
Faisons intervenir les lois des mailles du paragraphe **B3.4.4.3.** :

$$p_E = \left[R_S \cdot I_{Sd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sd} - \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sq} \right] \cdot I_{Sd} + \left[R_S \cdot I_{Sq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sq} + \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sd} \right] \cdot I_{Sq}$$

$$p = \left\{ R_S \cdot I_{Sd}^2 + R_S \cdot I_{Sq}^2 \right\} + \left\{ \frac{d\Phi_{Sd}}{dt} \cdot I_{Sd} + \frac{d\Phi_{Sq}}{dt} \cdot I_{Sq} \right\} + \left\{ \mathbf{w}_S (\Phi_{Sd} \cdot I_{Sq} - \Phi_{Sq} \cdot I_{Sd}) \right\}$$

Le premier terme entre accolades est facilement identifiable aux pertes joules. Le second terme correspond à de la puissance électromagnétique stockée dans le champ comme le montre le calcul ci-dessous :

Figure 21



Exprimons la puissance électrique instantanée mise en jeu dans le circuit parfait ci-contre (pertes joule nulles) :

$$p_E = u \cdot i = -e \cdot i = + \frac{dj}{dt} \cdot i$$

Cette puissance correspond à de la puissance électromagnétique stockée dans le champ (ou le flux). Il ne s'agit pas de puissance dissipée par effet Joule puisque le circuit est parfait, par ailleurs le circuit ci-dessus ne met pas évidence de transformation d'énergie.

Reste donc le 3ème terme entre accolades : ce terme ne peut donc représenter que la puissance électrique transformée en puissance mécanique puisque notre modélisation néglige les pertes fer.

B4.2. COUPLE INSTANTANE

Cette puissance peut se mettre sous la forme :

$$p_E = t_E \cdot \Omega_S = \mathbf{w}_S (\Phi_{Sd} \cdot I_{Sq} - \Phi_{Sq} \cdot I_{Sd})$$

$$t_E = \frac{\mathbf{w}_S}{\Omega_S} \cdot (\Phi_{Sd} \cdot I_{Sq} - \Phi_{Sq} \cdot I_{Sd})$$

$$t_E = p \cdot (\Phi_{Sd} \cdot I_{Sq} - \Phi_{Sq} \cdot I_{Sd})$$

On a utilisé la lettre t_E pour désigner le couple dans cette expression pour la différencier de la notation T_E utilisée en **B2.4**. car il s'agissait du couple en régime permanent ; p désigne ici le nombre de paires de pôles de la machine.

B4.3. AUTRES EXPRESSIONS DU COUPLE INSTANTANE

Il est possible d'obtenir d'autres expressions du couple instantané en utilisant les expressions des flux **statoriques** :

$$t_E = p \cdot ((L_S I_{Sd} + M_{SR} I_{Rd}) \cdot I_{Sq} - (L_S I_{Sq} + M_{SR} I_{Rq}) \cdot I_{Sd})$$

$$t_E = p \cdot M_{SR} (I_{Rd} I_{Sq} - I_{Rq} I_{Sd})$$

Ou bien encore en faisant appel aux flux **rotoriques** :

$$\Phi_{Rd} = L_R I_{Rd} + M_{SR} I_{Sd} \text{ soit } I_{Rd} = \frac{\Phi_{Rd}}{L_R} - \frac{M_{SR}}{L_R} I_{Sd} \text{ et } \Phi_{Rq} = L_R I_{Rq} + M_{SR} I_{Sq} \text{ soit } I_{Rq} = \frac{\Phi_{Rq}}{L_R} - \frac{M_{SR}}{L_R} I_{Sq}$$

$$t_E = p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq} - \Phi_{Rq} I_{Sd})$$

B4.4. INTERPRETATION DES EXPRESSIONS DU COUPLE INSTANTANE

$$\begin{aligned} t_E &= p \cdot (\Phi_{Sd} \cdot I_{Sq} - \Phi_{Sq} \cdot I_{Sd}) \\ t_E &= p \cdot M_{SR} (I_{Rd} I_{Sq} - I_{Rq} I_{Sd}) \\ t_E &= p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq} - \Phi_{Rq} I_{Sd}) \end{aligned}$$

Quelle que soit l'une des 3 expressions ci-dessus, on constate que le couple électromagnétique résulte de ***l'interaction d'un terme de flux et d'un terme de courant***.

Bien-sûr, ces expressions rappellent le couple de la machine à courant continu. Dans ce cas, c'est le collecteur qui permet naturellement d'obtenir ce découplage. Le problème posé ici est de pouvoir ***contrôler indépendamment l'un de l'autre le terme de flux et le terme de courant***.

Cette remarque n'est pas anodine, la simplicité de construction de la machine asynchrone doit se « payer » dans ce contrôle !

C'est justement en cela que réside la commande vectorielle.

B5. SIMULATION du fonctionnement de la machine asynchrone dans la base de PARK

B5.1. RESUME DES EQUATIONS DISPONIBLES

On dispose des équations de tensions **stator** :

$$\begin{aligned}V_{Sd} &= R_S \cdot I_{Sd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sd} - \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sq} \\V_{Sq} &= R_S \cdot I_{Sq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sq} + \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sd}\end{aligned}$$

... avec des relations symétriques du côté **rotor** :

$$\begin{aligned}0 &= R_R \cdot I_{Rd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rd} - \mathbf{w}_R \cdot \Phi_{Rq} \\0 &= R_R \cdot I_{Rq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rq} + \mathbf{w}_R \cdot \Phi_{Rd}\end{aligned}$$

On dispose des équations de flux **stator** :

$$\begin{aligned}\Phi_{Sd} &= L_S \cdot I_{Sd} + M_{SR} \cdot I_{Rd} \\ \Phi_{Sq} &= L_S \cdot I_{Sq} + M_{SR} \cdot I_{Rq}\end{aligned}$$

... avec des relations symétriques du côté **rotor** :

$$\begin{aligned}\Phi_{Rd} &= L_R \cdot I_{Rd} + M_{SR} \cdot I_{Sd} \\ \Phi_{Rq} &= L_R \cdot I_{Rq} + M_{SR} \cdot I_{Sq}\end{aligned}$$

Rajoutons une équation de couple :

$$t_E = p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq} - \Phi_{Rq} I_{Sd})$$

et la relation entre les fréquences vue au début :

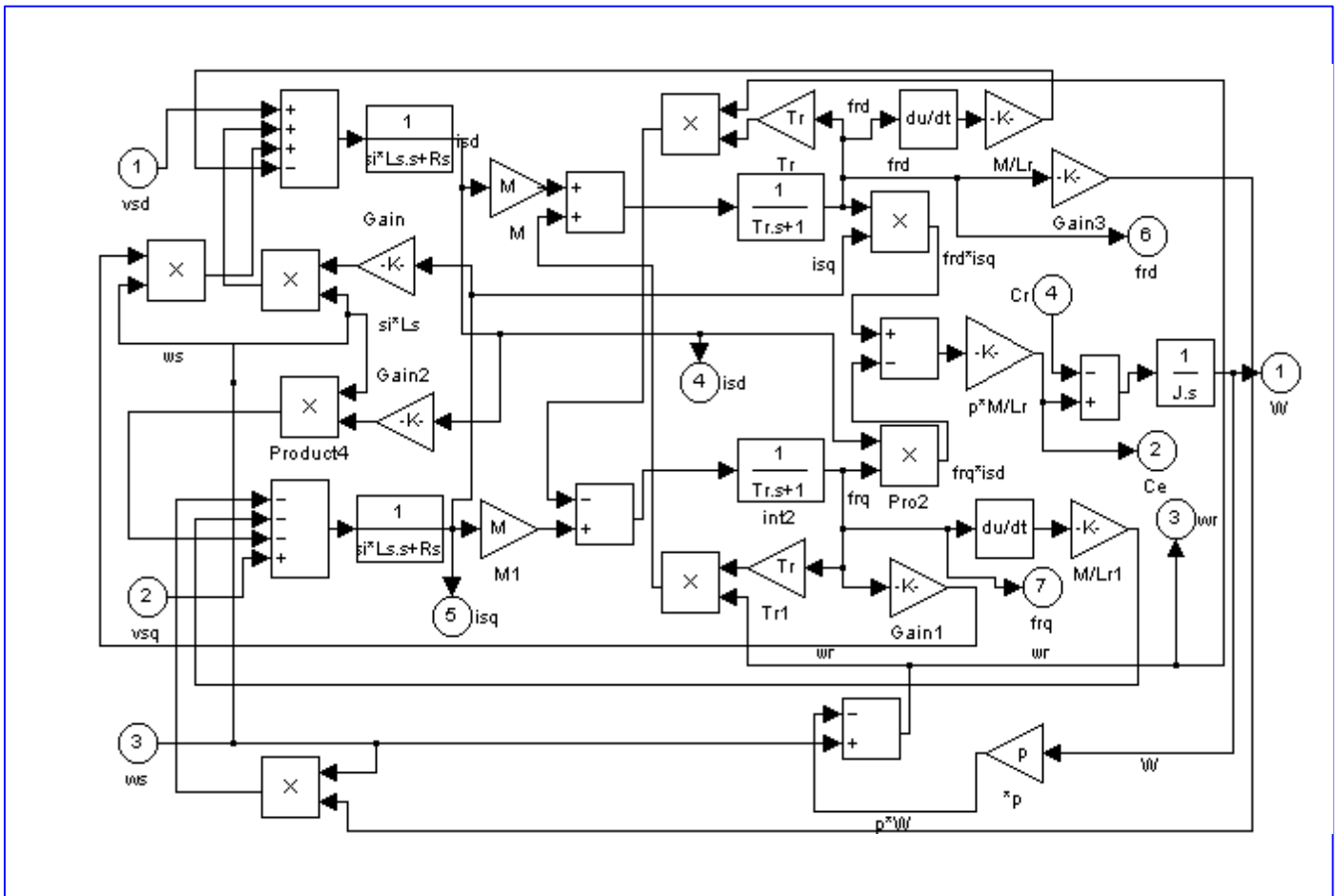
$$\mathbf{w}_S = p \cdot \Omega + \mathbf{w}_R$$

ainsi que la relation fondamentale de la dynamique :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = t_E - t_R$$

En utilisant la notation de Laplace, il est possible de dessiner un schéma fonctionnel de la MAS, tout comme on le fait pour une Mcc. *Le schéma est un peu plus compliqué, c'est tout !*

B5.2. DIAGRAMME FONCTIONNEL



La copie d'écran ci-dessus représente un écran de travail obtenu sous **MATLAB**. On reconnaîtra (peut-être ?) ci-dessus la mise en équation qui résulte des équations rappelées.

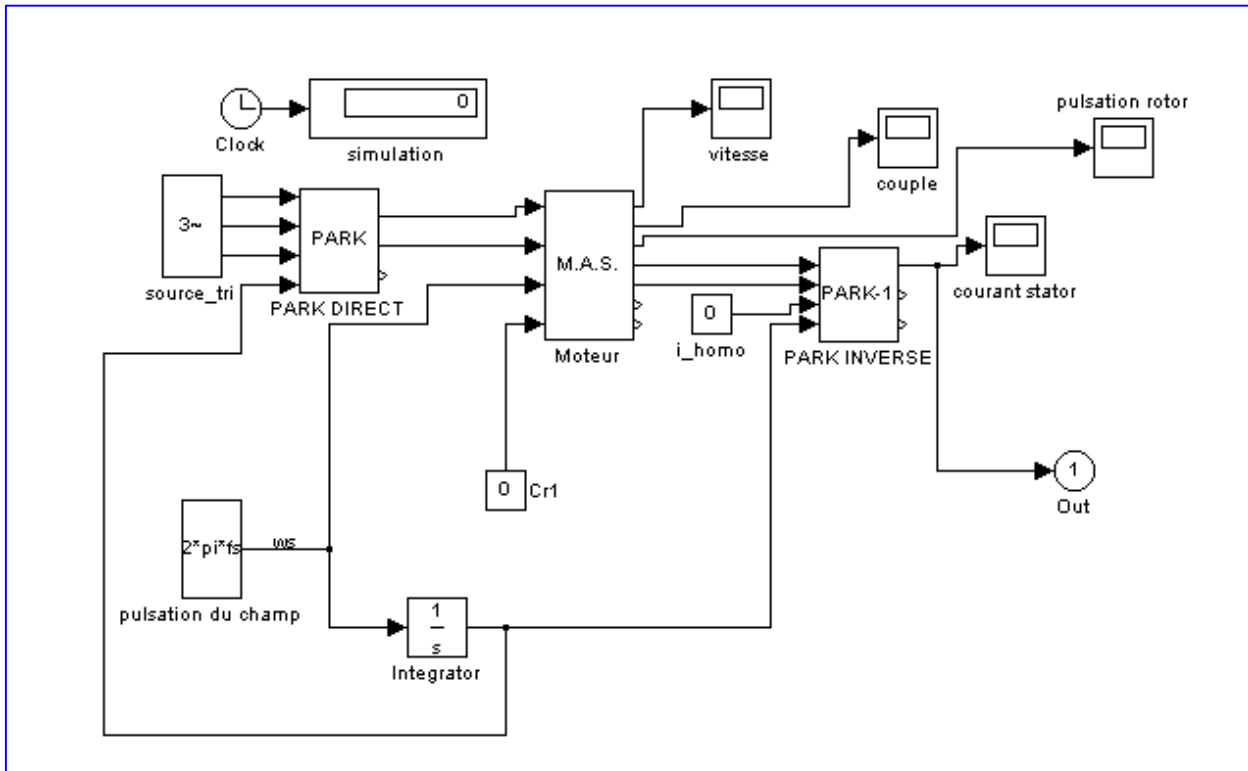
La machine asynchrone présente des **entrées** :

- $V_{sd}(1)$, $V_{sq}(2)$, $w_s(3)$: composantes de PARK et pulsation de la tension d'alimentation
- le couple résistant $C_r(4)$, caractéristique de la charge

Les sorties suivantes sont accessibles : $I_{sd}(4)$, $I_{sq}(5)$ composantes de PARK du courant moteur, $t_e(2)$: couple moteur (C_e) et $\Omega(1)$ vitesse de rotation (W).

B5.3. DEMARRAGE DIRECT DU MOTEUR

Il faut encore réaliser la **transformée de PARK** du réseau d'alimentation pour l'appliquer au schéma fonctionnel du moteur et calculer l'angle q_s par intégration de w_s . C'est ce qui réalise le schéma MATLAB qui suit :



Le bloc « **MAS** » correspond à la modélisation faite plus haut. « **source_tri** » est une source triphasée équilibrée de tension de valeur efficace 230 V et de fréquence 50 Hz. « **PARK DIRECT** » permet de calculer les composantes de PARK du réseau de tension et « **PARK INVERSE** » permet de reconstituer les courants absorbés par le moteur à partir de ses composantes de PARK. L'**intégrateur** permet d'obtenir q_s à partir de l'intégration de w_s .

Bien sûr pour que le modèle « tourne », il faut pouvoir disposer des coefficients de la machine, ce qui suppose que l'on puisse faire des mesures pour les déterminer.

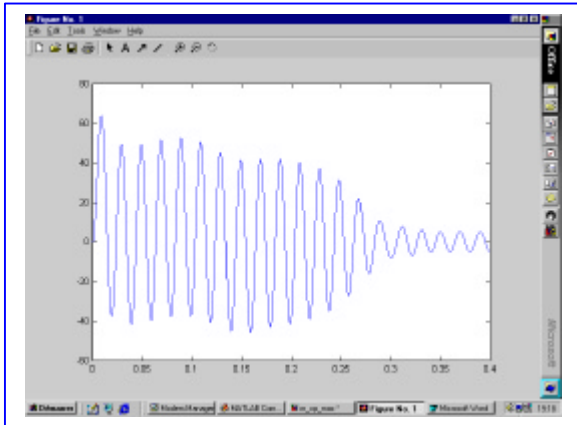
Les valeurs numériques utilisées dans le bloc M.A.S. ont été mesurées sur un moteur de 3 kW.

- Moment d'inertie $J = 50.10^{-3} \text{ kg.m}^2$
- Nombre de paires de pôles $p = 2$
- Inductance mutuelle cyclique $M_{SR} = 52 \text{ mH}$
- Inductance **rotorique** cyclique $L_R = 15.9 \text{ mH}$
- Inductance **statorique** cyclique $L_S = 191 \text{ mH}$
- Résistance **rotorique** $R_R = 93 \text{ m}\Omega$
- Résistance **statorique** $R_S = 1 \Omega$

On a supposé le couple résistant nul lors de ce démarrage.

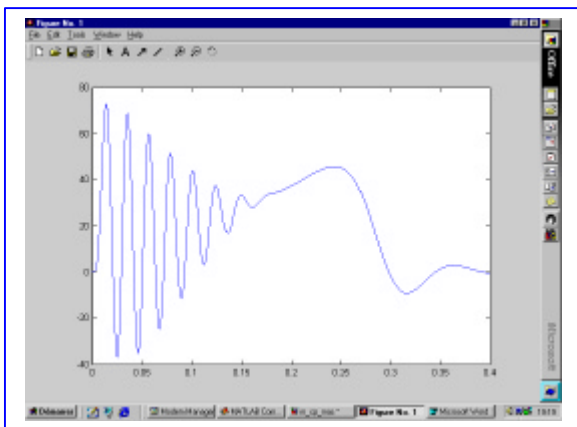
B5.4. RESULTATS DE LA MODELISATION

Les 3 courbes suivantes détaillent séparément l'évolution du courant **statorique**, du couple et de la vitesse .



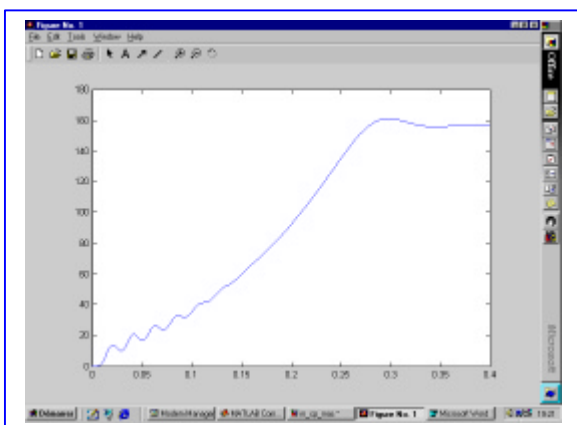
Evolution du courant moteur

On reconnaît le **classique appel de courant** au démarrage égal à 5 fois environ le courant nominal (le courant est mesuré en A). Après sa disparition, le régime permanent est atteint et il reste le courant correspondant au comportement inductif du moteur à vide.



Evolution du couple instantané

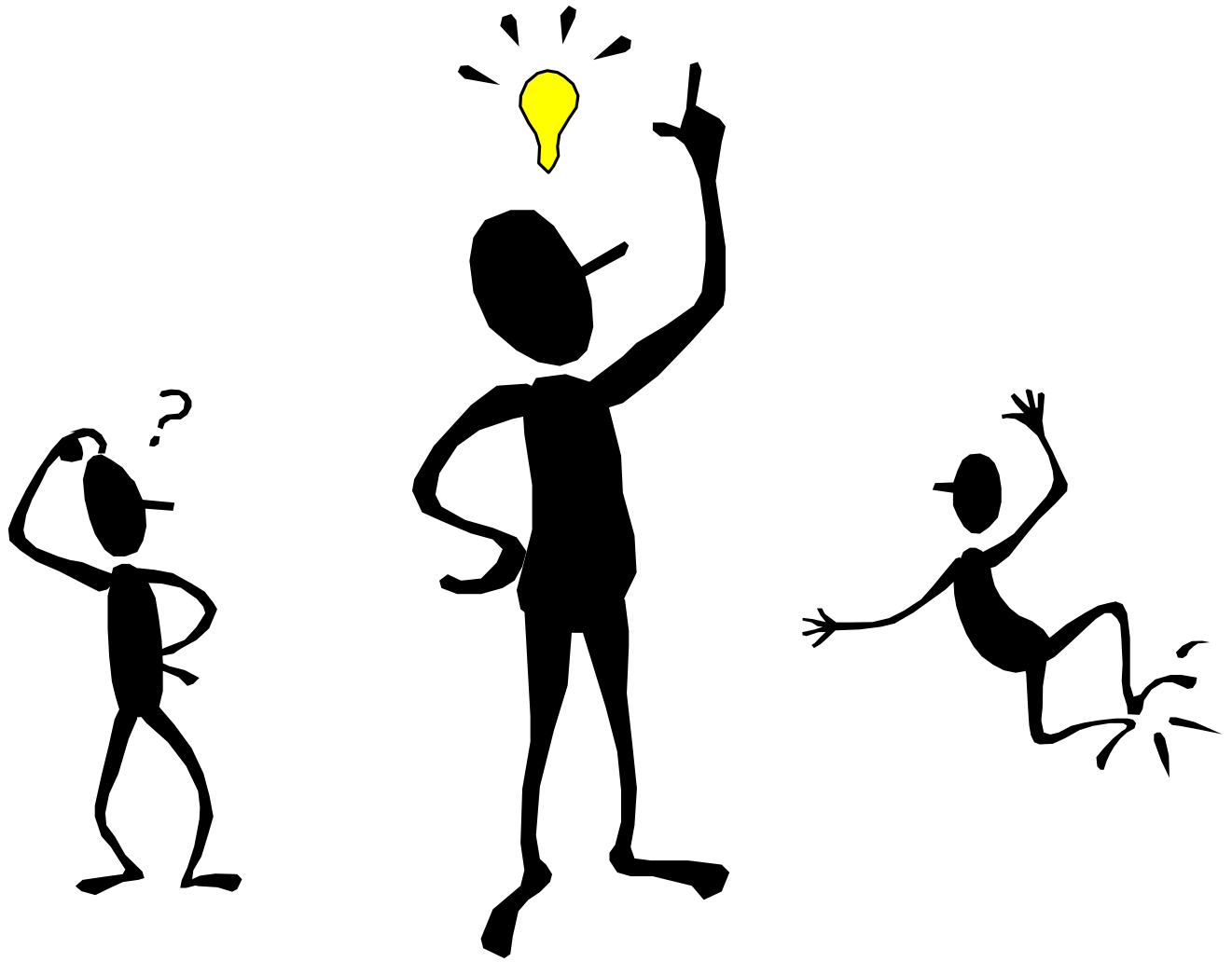
L'**oscillation de couple est l'élément marquant** de cet oscillogramme, puisque le couple (mesuré en N.m) monte jusqu'à plus de 70 N.m. Il faudra donc prendre garde au dimensionnement du couplemètre utilisé si on ne veut pas le détruire. Après disparition du régime transitoire, le couple tend vers zéro puisque l'on a annulé le couple résistant.



Evolution de la vitesse

Les **oscillations de couple se font évidemment ressentir sur l'évolution de la vitesse** qui en régime permanent se stabilise à 157 rad/s puisque le moteur possède 2 paires de pôles.

Il est intéressant de comparer ces résultats de simulation avec les oscillogrammes présentés dans le paragraphe **A2**. Les différences entre simulation et résultats expérimentaux peuvent s'expliquer par le fait que le moteur peut être saturé et que bien sûr les frottements ne sont pas négligeables.



C

**Principe d'une
commande à flux
orienté**

C1. Orientation du flux rotorique

Plusieurs stratégies sont envisageables. On va décrire ici une commande à flux **rotorique** orienté.

Reprenons l'expression du couple électromagnétique faisant intervenir les flux **rotoriques** :

$$t_E = p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq} - \Phi_{Rq} I_{Sd})$$

Avoir comme objectif d'orienter le flux signifie qu'on souhaite qu'il n'ait qu'une composante sur l'axe **d** par exemple.

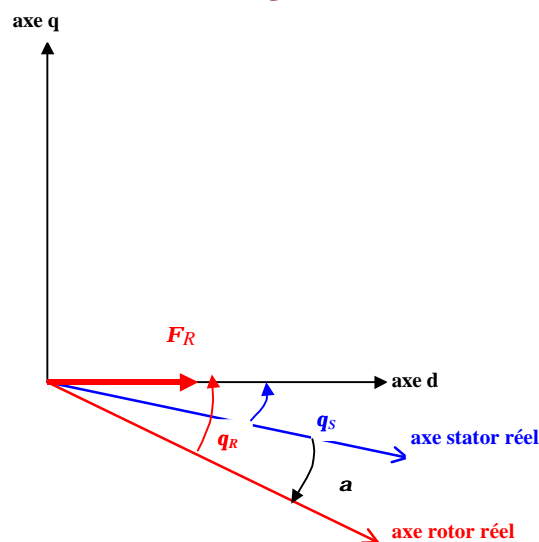
On aura donc comme objectif d'**annuler** F_{Rq} . C'est bien sûr le rôle de la commande à concevoir.

Le couple se réduira alors à :

$$t_E = p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq})$$

La stratégie consistera donc à contrôler de façon indépendante le terme de flux et le terme de courant pour imposer un couple.

Figure 22



La **Figure 22** montre le flux **rotorique** orienté sur l'axe **d**.

Cela suppose donc de maîtriser également l'angle q_s . L'angle a sera lui, donné par un capteur de position (codeur incrémental).

Rappelons les équations utilisables pour la commande :

Orientation du flux **rotorique** :

$$\Phi_{Rd} = L_R \cdot I_{Rd} + M_{SR} \cdot I_{Sd}$$

$$0 = L_R \cdot I_{Rq} + M_{SR} \cdot I_{Sq}$$

Loi des mailles au **rotor** :

$$0 = R_R \cdot I_{Rd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rd} - \omega_R \cdot \Phi_{Rq} = R_R \cdot I_{Rd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rd}$$

$$0 = R_R \cdot I_{Rq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rq} + \omega_R \cdot \Phi_{Rd} = R_R \cdot I_{Rq} + \omega_R \cdot \Phi_{Rd}$$

$$\text{car } \Phi_{Rq} = 0$$

C2. Estimation de Φ_{Rd}

Seules les grandeurs **statoriques** sont accessibles, les grandeurs **rotoriques**, elles, ne le sont pas, il faut donc pouvoir les estimer à partir des grandeurs **statoriques**.

A partir de $\Phi_{Rd} = L_R \cdot I_{Rd} + M_{SR} \cdot I_{Sd}$ et de $0 = R_R \cdot I_{Rd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rd}$, on obtient

$$\Phi_{Rd} = -\frac{L_R}{R_R} \cdot \frac{d}{dt} \Phi_{Rd} + M_{SR} \cdot I_{Sd}$$

soit $\Phi_{Rd} + \frac{L_R}{R_R} \cdot \frac{d}{dt} \Phi_{Rd} = M_{SR} \cdot I_{Sd}$ qui peut être réécrit en utilisant la notation de Laplace : « s » = $\frac{d}{dt}$

$$\Phi_{Rd} \left(1 + \frac{L_R}{R_R} s \right) = M_{SR} \cdot I_{Sd} \text{ ou encore en posant } \frac{L_R}{R_R} = t_R, \Phi_{Rd} (1 + t_R s) = M_{SR} \cdot I_{Sd}$$

$$\Phi_{Rd_est} = \frac{M_{SR}}{1 + t_R s} \cdot I_{Sd}$$

Le flux Φ_{Rd} peut être estimé (Φ_{Rd_est}) à partir du courant I_{Sd} grandeur statorique accessible à partir de la mesure des courants réels statoriques sous réserve de la réalisation de la transformation de PARK.

t_R représente la constante de temps **rotorique** de la machine. Avec les valeurs numériques utilisées dans la modélisation, on a $t_R = 171$ ms. Pour faire varier le flux Φ_{Rd} de la machine, il faut faire varier I_{Sd} , mais cette variation prendra une durée non négligeable (quelques t_R) du fait du premier ordre présent dans l'expression de Φ_{Rd} . On se souviendra qu'établir un flux suppose l'apport d'une énergie et

que cela ne peut se faire de façon instantanée. On prendra donc le temps de laisser le flux s'installer dans la machine avant de faire varier I_{Sq} pour obtenir le couple souhaité : $t_E = p \cdot \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} I_{Sq})$.

C3. Estimation de ω_S et de θ_S

L'estimation du flux sera réalisable sous réserve que l'on puisse faire la transformation de PARK, ce qui suppose la connaissance de l'angle q_S .

A partir de $0 = R_R \cdot I_{Rq} + w_R \cdot \Phi_{Rd}$ et de $0 = L_R \cdot I_{Rq} + M_{SR} \cdot I_{Sq}$ on tire

$$w_R = -\frac{R_R \cdot I_{Rq}}{\Phi_{Rd}}$$

$$w_{R_est} = \frac{M_{SR}}{\Phi_{Rd_est}} \cdot \frac{R_R}{L_R} \cdot I_{Sq}, \quad q_{R_est} = \int \frac{M_{SR}}{\Phi_{Rd_est}} \cdot \frac{R_R}{L_R} \cdot I_{Sq} dt + q_{R0} \text{ et } q_{S_est} = q_{R_est} + a$$

q_S sera donc estimé (q_{S_est}) à partir de la mesure de a (codeur incrémental), et du courant I_{Sq} grandeur statorique accessible à partir de la mesure des courants réels statoriques.

C4. Loi des mailles pour V_{Sd} et V_{Sq}

C4.1. loi des mailles pour V_{Sd}

Reprenons la loi des mailles statorique :

$$V_{Sd} = R_S \cdot I_{Sd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sd} - w_S \cdot \Phi_{Sq}$$

Nous allons exprimer cette tension en fonction des 2 grandeurs utiles à la maîtrise du couple : Φ_{Rd} et I_{Sq} .

$$I_{Sd} = \frac{1+t_{R \cdot S}}{M_{SR}} \cdot \Phi_{Rd} \text{ et } \Phi_{Sd} = L_S \cdot I_{Sd} + M_{SR} \cdot I_{Rd}$$

A partir de $\Phi_{Rd} = L_R \cdot I_{Rd} + M_{SR} \cdot I_{Sd}$ on tire $I_{Rd} = \frac{1}{L_R} (\Phi_{Rd} - M_{SR} \cdot I_{Sd})$

$$\text{soit } \Phi_{Sd} = L_S \cdot I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} (\Phi_{Rd} - M_{SR} \cdot I_{Sd}) = \left(L_S - \frac{M_{SR}^2}{L_R} \right) I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_{Rd}$$

$$\Phi_{Sd} = L_S \left(1 - \frac{M_{SR}^2}{L_R \cdot L_S} \right) I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_{Rd}$$

$$\Phi_{Sd} = s L_S \cdot I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_{Rd}$$

où s est le coefficient de dispersion de BLONDEL.

De la même façon, il faut exprimer Φ_{Sq} :

$$\Phi_{Sq} = L_S \cdot I_{Sq} + M_{SR} \cdot I_{Rq}$$

$$\Phi_{Rq} = L_R \cdot I_{Rq} + M_{SR} \cdot I_{Sq} = 0 \text{ avec l'orientation du flux ce qui donne } I_{Rq} = -\frac{M_{SR}}{L_R} \cdot I_{Sq}$$

$$\Phi_{Sq} = L_S \cdot I_{Sq} - \frac{M_{SR}^2}{L_R} \cdot I_{Sq} = \mathbf{s}L_S \cdot I_{Sq}$$

Il est donc possible maintenant d'écrire :

$$V_{Sd} = R_S \cdot I_{Sd} + \frac{d}{dt} \left(\mathbf{s}L_S I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_{Rd} \right) - \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{s}L_S I_{Sq}$$

$$V_{Sd} = R_S \cdot I_{Sd} + \mathbf{s}L_S \cdot \mathbf{s}I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \cdot \mathbf{s} \cdot \Phi_{Rd} - \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{s}L_S I_{Sq}$$

$$V_{Sd} = (R_S + \mathbf{s}L_S \cdot \mathbf{s}) I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \cdot \mathbf{s} \cdot \Phi_{Rd} - \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{s}L_S I_{Sq} = (R_S + \mathbf{s}L_S \cdot \mathbf{s}) \frac{(1 + \mathbf{t}_R \mathbf{s})}{M_{SR}} \Phi_{Rd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \cdot \mathbf{s} \cdot \Phi_{Rd} - \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{s}L_S I_{Sq}$$

où la variable s représente l'opérateur de Laplace.

$$V_{Sd} = \left[(R_S + \mathbf{s}L_S \cdot \mathbf{s}) \frac{(1 + \mathbf{t}_R \mathbf{s})}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \cdot \mathbf{s} \right] \Phi_{Rd} - \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{s}L_S I_{Sq}$$

Cette relation exprime la loi des mailles interne à la machine sur l'axe d en fonction des 2 grandeurs que nous avons choisies pour exprimer le couple. **On y remarque le couplage entre l'axe d et l'axe q .**

C4.2. loi des mailles pour V_{Sq}

Reprenons la loi des mailles **statorique** :

$$V_{Sq} = R_S \cdot I_{Sq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sq} + \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sd}$$

que l'on peut exprimer comme suit compte tenu des expressions du paragraphe précédent :

$$V_{Sq} = R_S \cdot I_{Sq} + \frac{d}{dt} (\mathbf{s}L_S I_{Sq}) + \mathbf{w}_S \cdot \Phi_{Sd}$$

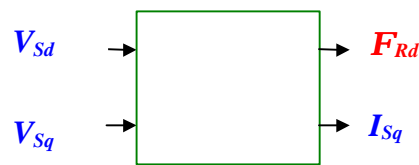
$$\text{avec } \Phi_{Sd} = \mathbf{s}L_S \cdot I_{Sd} + \frac{M_{SR}}{L_R} \Phi_{Rd} = \left(\mathbf{s}L_S \frac{1 + \mathbf{t}_R \mathbf{s}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_{Rd}$$

$$V_{Sq} = (R_S + sL_S)I_{Sq} + w_S \left(sL_S \frac{1+t_{R.S}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_{Rd}$$

Cette relation exprime la loi des mailles sur l'axe q en fonction des 2 grandeurs que nous avons choisies pour exprimer le couple. **On y remarque le couplage entre l'axe d et l'axe q .**

C4.3. Représentation des lois de mailles

La machine reçoit une alimentation en tension (V_{Sd} et V_{Sq}) et donne en sortie les grandeurs F_{Rd} et I_{Sq} choisies pour la régulation du couple



MACHINE ASYNCHRONE
dans la base de PARK

En réécrivant les lois des mailles pour V_{Sd} et V_{Sq} , on peut établir un schéma fonctionnel interne à la machine.

Pour V_{Sd} on a :

$$V_{Sd} = \left[(R_S + sL_S) \frac{(1+t_{R.S})}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right] \Phi_{Rd} - w_S sL_S I_{Sq} \text{ ce qui donne :}$$

$$\Phi_{Rd} = \frac{V_{Sd} + w_S sL_S I_{Sq}}{\left[(R_S + sL_S) \frac{(1+t_{R.S})}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right]} = \frac{1}{\left[(R_S + sL_S) \frac{(1+t_{R.S})}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right]} (V_{Sd} + w_S sL_S I_{Sq})$$

$$\Phi_{Rd} = A(V_{Sd} + B.I_{Sq})$$

avec

$$A = \frac{1}{\left[(R_S + sL_S) \frac{(1+t_{R.S})}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right]} \text{ et } B = w_S sL_S$$

Pour V_{Sq} on a :

$$V_{Sq} = (R_S + sL_S)I_{Sq} + w_S \left(sL_S \frac{1+t_{R.S}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_{Rd} \text{ ce qui donne :}$$

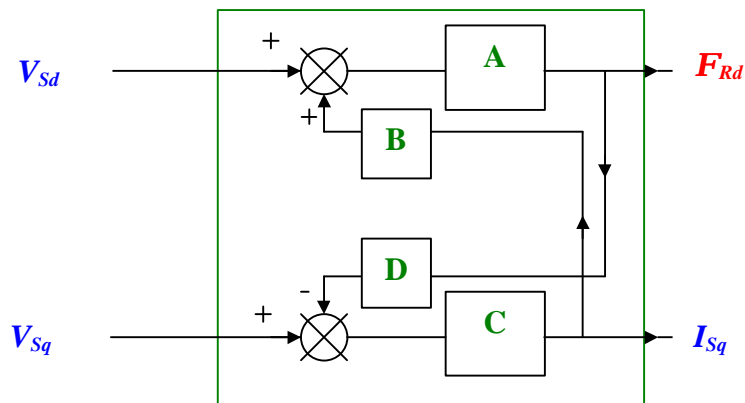
$$I_{Sq} = \frac{V_{Sq} - w_s \left(sL_s \frac{1+t_{R \cdot s}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_{Rd}}{(R_s + sL_s \cdot s)} = \frac{1}{(R_s + sL_s \cdot s)} \left[V_{Sq} - w_s \left(sL_s \frac{1+t_{R \cdot s}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right) \Phi_{Rd} \right]$$

$$I_{Sq} = C \cdot [V_{Sq} - D \cdot \Phi_{Rd}]$$

avec

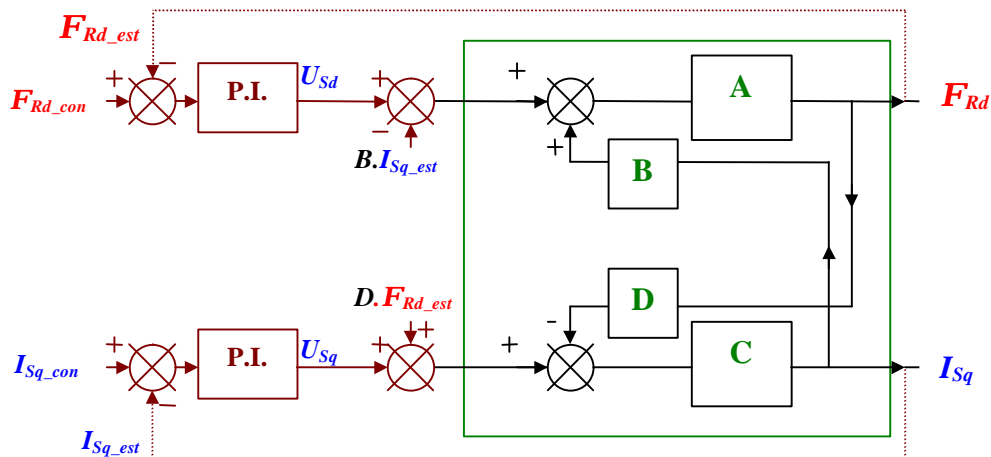
$$C = \frac{1}{(R_s + sL_s \cdot s)} \text{ et } D = w_s \left(sL_s \frac{1+t_{R \cdot s}}{M_{SR}} + \frac{M_{SR}}{L_R} \right)$$

Le schéma ci-dessous résume les 2 équations précédentes donnant F_{Rd} et I_{Sq} :



MACHINE ASYNCHRONE
Dans la base de PARK

C5. Elaboration des lois de commande pour V_{sd} et V_{sq}



MACHINE ASYNCHRONE
Dans la base de PARK

Le schéma ci-dessus représente la commande des grandeurs de réglage du couple.

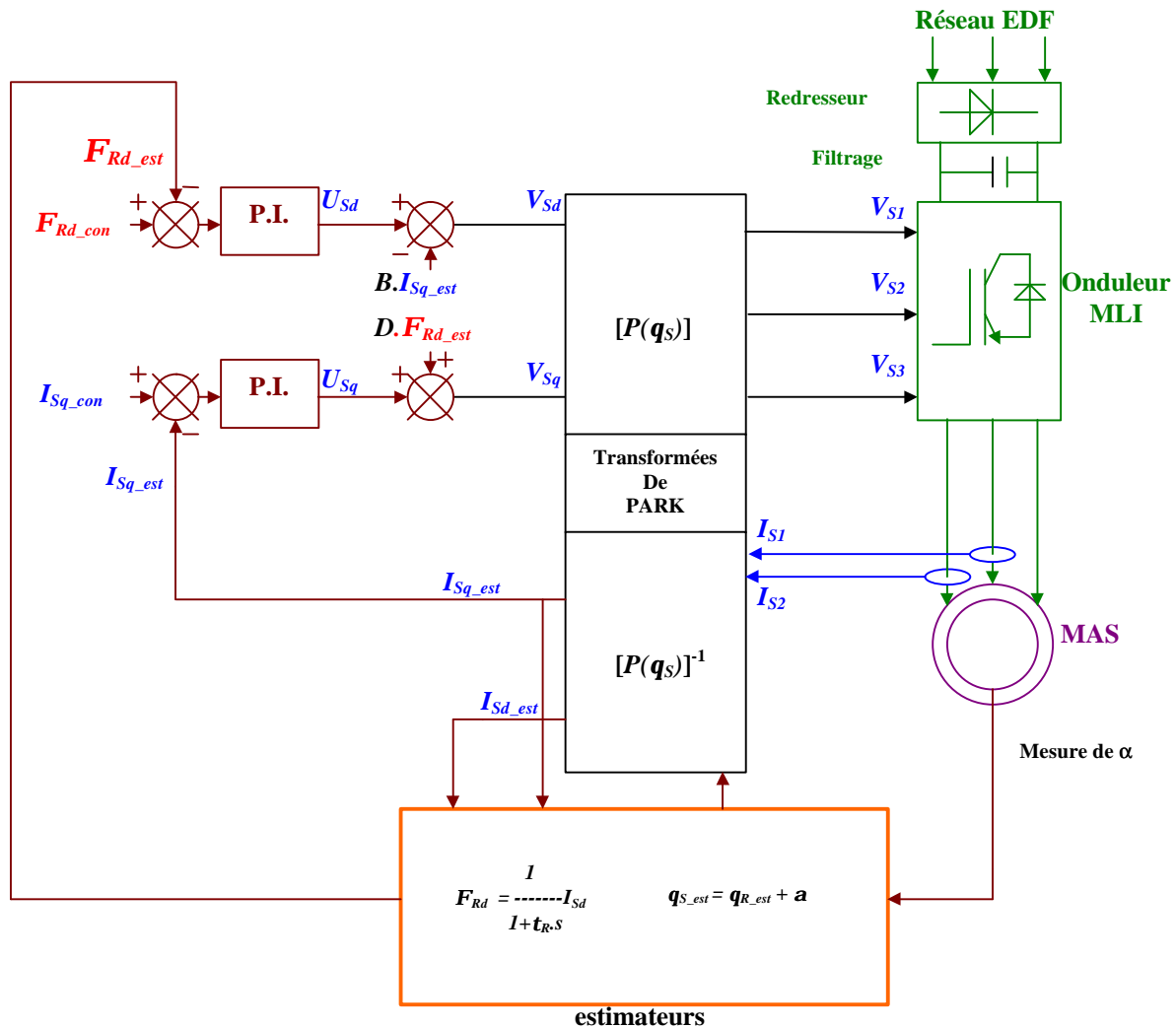
Les mesures de F_{Rd} et I_{sd} (appelées F_{Rd_est} et I_{sd_est}) sont comparées aux consignes. Un correcteur

P.I. (Proportionnel et Intégral) sur chaque entrée permet la correction de l'erreur.

On aura donc :

$\Phi_{Rd} = A.(U_{Sd} - B.I_{Sq_est} + B.I_{Sq}) = A.U_{Sd}$ et $I_{Sq} = C.(U_{Sq} + D.\Phi_{Rd_est} - D.\Phi_{Rd}) = C.U_{Sq}$ si l'estimation des grandeurs de contrôle est convenable.

C6. Schéma fonctionnel d'une commande à flux rotorique orienté



On a rajouté sur le schéma fonctionnel de la commande la partie « puissance » permettant d'alimenter la MAS.

Ainsi, les commandes V_{Sd} et V_{Sq} doivent être ramenées dans la base de départ pour servir de loi de commande à un onduleur **MLI**.

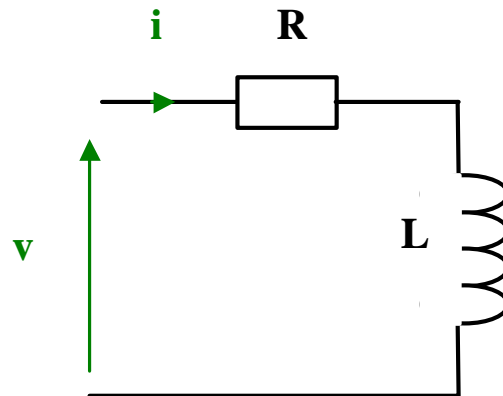
On remarque les 2 capteurs de courants I_{S1} et I_{S2} (le troisième n'étant pas nécessaire puisque la somme des 3 courants **statoriques** est nulle). Ces courants sont ramenés dans la **base de PARK** grâce à l'estimation de l'angle q_s . La mesure de a est réalisée à partir d'un codeur incrémental. On peut imaginer aussi l'utiliser comme capteur de vitesse dans le cas d'un asservissement de vitesse.

I_{Sq_est} et F_{Rd_est} sont comparés avec leur consigne.

ANNEXES

1. régime permanent
2. régime quelconque
3. inductance propre
4. inductance mutuelle
5. calcul matriciel

ANNEXE 1 : REGIME PERMANENT



Soit par exemple le circuit ci-dessus avec $v = V_m \cdot \sin \omega t$

$$\text{On a } v = Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cdot \sin \omega t$$

La solution pour i de cette équation différentielle donne :

$$i = i_{\text{libre}} + i_{\text{forcé}}$$

où i_{libre} est de la forme $I_o \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = L/R$

$$\text{et } i_{\text{forcé}} = I_m \cdot \sin(\omega t - \mathbf{j})$$

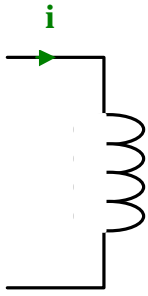
Pour l'étude en **régime permanent**, on suppose que le **régime libre** s'est éteint (soit au bout de 5τ à 1% près). Il ne reste alors plus que le régime **forcé par la source de tension** de pulsation ω . Le courant a donc la même allure que la tension : sinusoïdale à la pulsation ω et déphasé de φ par rapport à cette tension.

ANNEXE 2 : REGIME QUELCONQUE

L'expression « *régime quelconque* » s'oppose ici à celle de « *régime permanent* » où l'on ne se préoccupe pas des régimes transitoires qui séparent les régimes établis sinusoïdaux.

La modélisation décrite dans ce paragraphe est donc plus générale que celle présentée en **B2**.

ANNEXE 3 : INDUCTANCE PROPRE



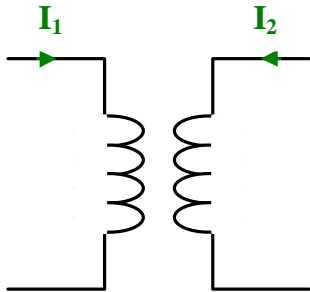
Le **coefficient d'inductance propre** d'un circuit traduit le fait que le *flux propre* du champ magnétique créé par le *propre* courant circulant dans le circuit *i* est proportionnel à ce courant.

On écrit :

$$j_{\text{propre}} = L.i$$

Ca ne pose pas de problème pour un bobinage réalisé sur un milieu non magnétique. Mais dans le cas où l'on utilise un milieu ferromagnétique, le *phénomène de saturation doit être négligé pour que ce coefficient puisse être considéré comme constant.*

ANNEXE 4 : INDUCTANCE MUTUELLE



On parle de **coefficient d'inductance mutuelle** quand on a plusieurs circuits en influence magnétique. Le *flux mutuel* du champ magnétique créé par le courant I_1 (circulant dans le circuit 1) à travers les spires du circuit 2 s'écrit :

$$\mathbf{j}_{mutuel2} = M_{1 \rightarrow 2} \cdot i_1$$

De la même façon, on a :

$$\mathbf{j}_{mutuel1} = M_{2 \rightarrow 1} \cdot i_2$$

On peut montrer que l'on a $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$ **coefficient d'inductance mutuelle** sans plus de précision.

ANNEXE 5 : CALCUL MATRICIEL

1. DEFINITIONS

- **transposée d'une matrice** $[A]^T$: on « retourne » les coefficients par rapport à la diagonale principale « descendante »

propriété : $[A.B]^T = [B]^T.[A]^T$

- **matrice diagonale** : matrice qui a tous ses coefficients nuls sauf ceux de la diagonale descendante

cas particulier : matrice unité $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **matrice adjointe** : on conjugue chaque terme et on transpose (pour une matrice réelle : c'est la transposée)

2. DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE

- **déterminant d'ordre 2** :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **déterminant d'ordre 3**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a.X_a + b.X_b + c.X_c$$

$$X_a = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}; X_b = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}; X_c = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

On a développé ici suivant la 1ère ligne où X_a est appelé : **cofacteur de a**

Il existe une règle simple permettant de calculer un déterminant d'ordre 3 : *Règle de Sarrus*

3. INVERSE D'UNE MATRICE

Pour qu'une matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit non nul

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{com}_A$$

com_A est la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient par son cofacteur. Dans certains cas, ce calcul peut heureusement se simplifier.

4. CHANGEMENT DE BASE

4.1. pour les vecteurs :

$$[V]_{AB} = [P] \cdot [V]_{NB} \text{ ou } [V]_{NB} = [P]^{-1} \cdot [V]_{AB}$$

$[P]$ est appelée matrice de changement de base ($_{NB}$: nouvelle base, $_{AB}$: ancienne base)

3.3. pour les matrices

$$[A]_{NB} = [P]^{-1} \cdot [A]_{AB} \cdot [P]$$

On fait souvent des changements de base pour simplifier l'écriture des matrices en les diagonalisant.

5. DIAGONALISATION D'UNE MATRICE CARREE

Une condition suffisante est que la matrice ait des valeurs propres distinctes 2 à 2. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique soit :

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0$$

La matrice diagonale est alors : $[D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ formée avec les valeurs propres. Une matrice

de passage $[P]$ est constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres en les rangeant dans le même ordre que les valeurs propres :

$$[P] = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} v_{1I1} \\ v_{2I1} \\ v_{3I1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_{1I2} \\ v_{2I2} \\ v_{3I2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_{1I3} \\ v_{2I3} \\ v_{3I3} \end{array} \right) \end{array} \right]$$

Remarque : une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

6. PRODUIT SCALAIRE DE 2 VECTEURS

$$[V_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; [V_2] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire est défini par :

$$PS([V_1][V_2]) = [V_1]^T [V_2]^* = x_1 \cdot y_1^* + x_2 \cdot y_2^* + x_3 \cdot y_3^*$$

où la notation (*) signifie « conjugué »

Dans le cas de vecteurs réels, les coordonnées sont leurs propres conjugués.

7. CHANGEMENT DE BASE ORTHONORME

Lorsque les 3 vecteurs de la matrice de changement de base ont un produit scalaire nul 2 à 2, le changement de base est dit orthogonal. Si en plus les vecteurs sont normés (*leur norme est égale à 1*), le changement de base est dit **orthonormé**. Il y a intérêt à ce que cela soit le cas. On montre dans ce cas que l'on a alors :

$$[P]^{-1} = [P^*]^T$$

ou

$$[P]^{-1} = [P]^T$$

dans le cas d'une matrice réelle, ce qui rend très simple le calcul de la matrice inverse.

Remarque : les vecteurs propres d'une matrice réelle symétrique sont orthogonaux.